فیزیک

۱

گزینه ۴

گام اول: باتوجه‌به شکل طول قطعه سیم ℓ_1 برابر طول نیم‌دایره‌ای به شعاع r $(\ell_1 = \pi r)$ و طول قطعه سیم ℓ_2، دو برابر شعاع دایره $(\ell_2 = 2r)$ است؛ بنابراین نسبت مقاومت آن‌ها به‌صورت زیر است (توجه داشته باشید که چون دو سیم هم‌جنس‌اند، مقاومت ویژهٔ آن‌ها برابر است):

$$R = \rho\frac{\ell}{A} \xrightarrow[\text{A: ثابت}]{\rho\text{: ثابت}} \frac{R_1}{R_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\pi r}{2r} = \frac{\pi}{2}$$

گام دوم: دو قطعه سیم به‌صورت موازی باهم در مدار قرارگرفته‌اند؛ بنابراین اختلاف‌پتانسیل دو سر آن‌ها برابر است و نسبت جریان عبوری از آن‌ها برابر است با:

$$V = RI \xrightarrow{\text{V : یکسان}} \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi}{2}$$

گام سوم: باتوجه‌به روابط به‌دست‌آمده در گام اول و دوم نسبت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم ℓ_1 به نیروی مغناطیسی وارد بر سیم ℓ_2 را به‌صورت زیر می‌نویسیم (هر دو سیم در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ قرار دارند و برای هردوی آن‌ها $\theta = 90°$ است):

$$F = I\ell B\sin\theta \xrightarrow[\text{B: یکسان}]{\theta=90°} \frac{F_1}{F_2} = \frac{I_1}{I_2} \times \frac{\ell_1}{\ell_2} \times 1 \times 1 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

۲

گزینه ۱

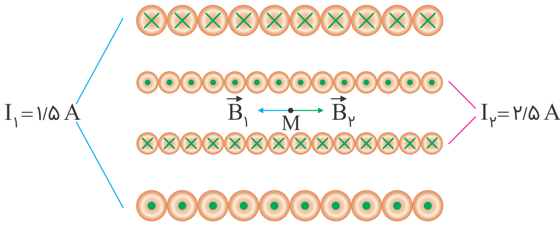
$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \Rightarrow 9 \times 10^{-3} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 12 \times I}{1 \times 10^{-2}} \Rightarrow I = \frac{9 \times 10^{-3}}{12 \times 12 \times 10^{-5}} \Rightarrow I = \frac{100}{15} = 6/25\ A$$

۳

گزینه ۱

گام اول:

با استفاده از قاعدهٔ دست راست جهت میدان مغناطیسی دو سیم‌لوله را در نقطهٔ M تعیین می‌کنیم: میدان مغناطیسی سیم‌لوله‌ها در خلاف جهت یکدیگرند. برای صفر شدن میدان برآیند در نقطهٔ M اندازهٔ میدان‌ها باید با یکدیگر برابر باشد:



$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{\ell_2} \xrightarrow{\ell_1 = \ell_2} N_1 I_1 = N_2 I_2$$

گام دوم: تعداد دورها در واحد طول (یک متر) از سیم‌لولهٔ بیرونی $۵۰\,m^{-1}$ است؛ یعنی در هر متر از آن ۵۰ دور وجود دارد. باتوجه‌به اینکه طول سیم‌لوله $۰/۵\,m$ است، تعداد دورهای سیم‌لوله $n = \frac{N}{LN} = ۵۰ \times ۰/۵ = ۲۵$ است.

$$N_1 I_1 = N_2 I_2 \Rightarrow ۲۵ \times ۱/۵ = N_2 \times ۲/۵ \Rightarrow N_2 = \frac{۲۵ \times ۱/۵}{۲/۵} = ۱۵$$

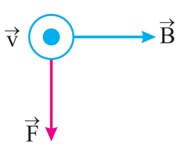
۴

گزینه ۱

$$F = qvB\sin\theta \Rightarrow B = \frac{F}{qvB\underbrace{\sin\theta}} = \frac{۴ \times ۱۰^{-۱۴}}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۵ \times ۱۰^{۵} \times ۱} = ۰/۵\,T$$

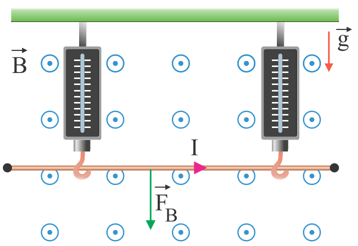
در حالتی نیرو بیشینه است که $\theta = ۹۰$ باشد

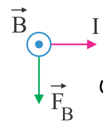
طبق قاعدهٔ دست راست داریم:



۵ **گزینه ۲**

گام اول: جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم از طرف میدان مغناطیسی را با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم:





جهت نیروی مغناطیسی به سمت پایین است، بنابراین به سیم دونیروی وزن و مغناطیسی به سمت پایین وارد می‌شود. دو نیروسنج مجموع اندازهٔ این دو نیرو را نشان می‌دهند.

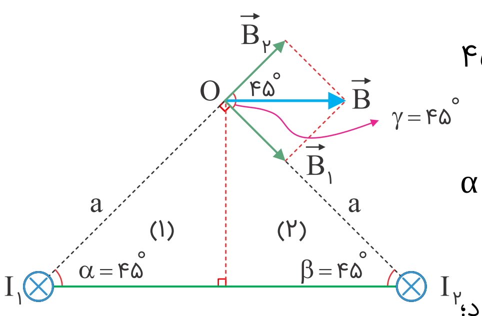
$$\text{مجموع اعدادی که دو نیروسنج نشان می‌دهد} = F_B + mg = I\ell B\sin\theta + mg$$
$$= ۳ \times ۱ \times ۱/۵ \times \sin ۹۰^\circ + ۵۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰ = ۴/۵ + ۰/۵ = ۵\,\mathrm{N}$$

هر نیروسنج نصف این مقدار را نشان می‌دهد:

$$\text{عددی که هر نیروسنج نشان می‌دهد} = \frac{F_B + mg}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵\,\mathrm{N}$$

۶ **گزینه ۳**

گام اول: مطابق شکل زیر بردار میدان $\vec{B}$ را روی امتداد خط واصل سیم‌ها و نقطهٔ O تجزیه کرده تا بردار میدان حاصل از هریک از سیم‌ها تعیین شود. با استفاده از قاعدهٔ دست راست جهت جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ درون‌سو خواهد بود.



گام دوم: دو مثلث (۱) و (۲) متشابه‌اند؛ بنابراین زوایای α و β باهم برابر و برابر با ۴۵° است.

$$\alpha = \beta = ۴۵^\circ$$

ازطرفی باتوجه‌به قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\gamma = ۴۵^\circ$ است.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، بردار $\vec{B}$ روی نیمساز زاویهٔ بین $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ قرار دارد؛ بنابراین اندازهٔ $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ برابر بوده و باتوجه‌به یکسان بودن فاصلهٔ نقطهٔ O از هریک از دو سیم (a)، جریان‌های عبوری از دو سیم نیز برابر است؛ یعنی:

$$I_۱ = I_۲$$

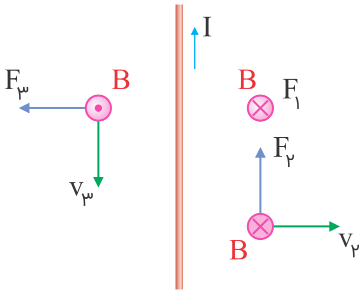
۷ **گزینه ۳**

طبق قاعدهٔ دست راست چون میدان مغناطیسی از چپ به راست و جریان درون‌سو است، نیروی مغناطیسی از بالا به پایین بر سیم وارد می‌شود.

۸ گزینه ۳

ابتدا جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم را در اطراف آن مشخص می‌کنیم و سپس جهت نیروی وارده بر تمام بارها را توسط قانون دست راست به دست می‌آوریم:

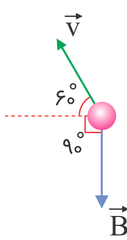
از شکل پیداست که امتداد $F_۲$ و $F_۳$ بر هم عمودند.



۹ گزینه ۲

۱۰ گزینه ۴

گام اول: ابتدا زاویهٔ بین بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را تعیین می‌کنیم.



$$\theta = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰^\circ$$

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار، اندازهٔ میدان مغناطیسی را به دست می‌آوریم:

$$F_B = |q|\, vB\sin\theta \Rightarrow B = \frac{F_B}{|q|\, v\sin\theta}$$

$$\Rightarrow B = \frac{۴ \times ۱۰^{-۶}}{۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۸۰۰۰ \times \sin ۱۵۰^\circ} \xrightarrow{\sin ۱۵۰=\sin(\pi-۳۰)=\sin ۳۰=\frac{۱}{۲}} B = \frac{۴ \times ۱۰^{-۶}}{۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۸۰۰۰ \times \frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\cancel{۸} \times \cancel{۱۰^{-۶}}}{۵ \times \cancel{۱۰^{-۶}} \times \cancel{۸} \times ۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۵} \times ۱۰^{-۳} = ۲ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{T} \Rightarrow B = ۲\,\mathrm{G}$$

۱۱ گزینه ۴

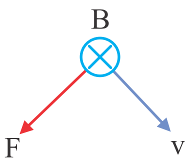
در لحظهٔ ورود ذره به ناحیهٔ (۲)، جهت بردار سرعت به سمت راست و جهت میدان مغناطیسی نیز برون‌سو است. با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر بار مثبت به‌سوی پایین خواهد بود. باتوجه‌به جهت انحراف بار q که به سمت بالا است، به این نتیجه می‌رسیم که بار q منفی است.

باتوجه‌به منفی بودن بار q، در ناحیهٔ (۱) چهار انگشت باز دست چپ را به‌سوی بالا (در جهت $\vec{v}$) قرار می‌دهیم به‌طوری‌که شست دست چپ در جهت انحراف ذره (به‌سوی راست) باشد. خم شدن انگشتان که جهت میدان مغناطیسی در این ناحیه را نشان می‌دهد، به‌سوی درون صفحه (درون‌سو) خواهد بود. در ناحیهٔ (۳)، چهار انگشت باز دست چپ را به‌سوی بالا (در جهت $\vec{v}$) قرار داده به‌طوری‌که خم انگشتان به‌سوی داخل صفحه (در جهت $\vec{B}_۳$) قرار گیرد، شست دست که جهت نیروی وارد بر ذره را نشان می‌دهد، به سمت چپ خواهد بود، بنابراین بار q، مسیر b را طی خواهد کرد.

۱۲

گزینه ۳

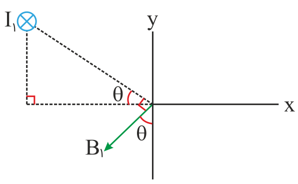
میدان مغناطیسی برآیند دو سیم در نقطهٔ M باید درون‌سو باشد. میدان سیم $I_{۱}$ در M درون‌سو است، بنابراین میدان سیم $I_{۲}$ هم باید در M درون‌سو باشد. این در حالتی است که یا $I_{۲}$ به سمت بالا باشد که در این صورت هر مقداری می‌تواند داشته باشد و یا به سمت پایین باشد ولی $I_{۱} < I_{۲}$ باشد که $B_{۱} < B_{۲}$ شده و میدان برآیند درون‌سو شود.

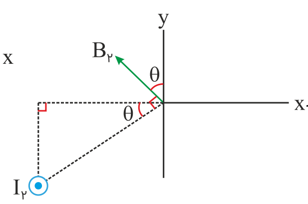


۱۳

گزینه ۳

ابتدا باتوجه‌به شکل‌های زیر میدان مغناطیسی هریک از سیم‌ها را در نقطهٔ O رسم می‌کنیم.





$$\tan\theta = \frac{a}{a\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ بین دو میدان مغناطیسی $۱۸۰ - ۲\theta = ۱۲۰^\circ$ است.

۱۴

گزینه ۴

روش ساده و کوتاه: چون جریان سیم‌ها خلاف جهت هم هستند، بنابراین در نقاط بین دو سیم میدان‌ها باهم جمع می‌شوند. همچنین چون نقطهٔ C به سیم حامل جریان قوی‌تر نزدیک‌تر است، میدان در این نقطه قوی‌تر از میدان در نقطهٔ B است. تنها گزینه‌ای که می‌تواند درست باشد گزینهٔ ۴ است.

$$B_C > B_B$$

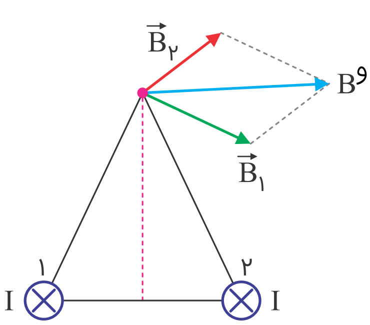
۱۵

گزینه ۲

همان طور که می‌دانیم میدان مغناطیسی سیم حامل جریان در فاصلهٔ خیلی دور از سیم صفر می‌شود. بنابراین میدان مغناطیسی برآیند دو سیم در فاصلهٔ دور صفر است. در یک نقطهٔ دلخواه روی عمودمنصف و در نزدیکی سیم‌ها میدان مغناطیسی برآیند رسم شده است.

همچنین میدان مغناطیسی برآیند دو سیم در نقطهٔ M وسط فاصلهٔ بینشان صفر است.

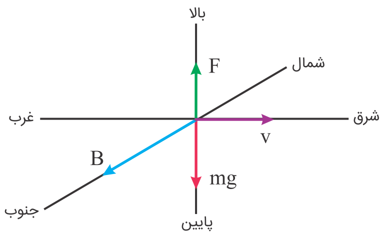
می‌توان نتیجه گرفت از فاصلهٔ دور تا وسط دو سیم، میدان مغناطیسی برآیند ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



۱۶

گزینه ۱

نیروی مغناطیسی باید نیروی وزن را خنثی کند. پس داریم:



$$F = mg \Rightarrow qvB = mg$$

$$v = \frac{mg}{qB} = \frac{۱۰^{-۱۰} \times ۱۰}{۲۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۸ \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۱}{۲۰۰} = ۰/۰۰۵$$

۱۷

گزینه ۴

باتوجه‌به جهت انحراف الکترون و قانون دست راست متوجه می‌شویم که B (میدان مغناطیسی) در مرکز حلقه، درون‌سو است؛ پس جهت جریان در حلقه (و مدار متوالی با آن) ساعت‌گرد است.

$$F = qvB\sin ۹۰ \Rightarrow ۱/۶۸ \times ۱۰^{-۲۰} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۵ \times ۱۰^{۲} B$$

$$\Rightarrow B = ۲۱ \times ۱۰^{-۵} T \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{۲r} \Rightarrow ۲۱ \times ۱۰^{-۵} = \frac{۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۱ \times I}{۲ \times ۲ \times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow I = ۷\,A$$

$$\text{ساعت‌گرد}: I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum (R + r)} \Rightarrow ۷ = \frac{-\varepsilon_۲ + ۳۰}{۳} \Rightarrow \varepsilon_۲ = ۹\,V$$

۱۸

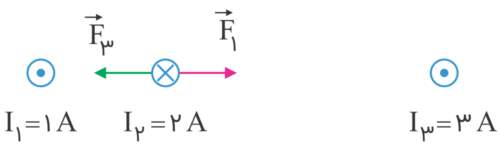
گزینه ۳

مواد فرومغناطیس به دو دسته تقسیم می‌شوند: فرومغناطیس سخت و نرم. در مواد فرومغناطیس سخت حجم حوزه‌های مغناطیسی به‌سختی تغییر می‌کند و همچنین پس از خروج از میدان مغناطیسی خارجی حجم این حوزه‌ها به حالت اول برنمی‌گردد مانند فولاد. به همین دلیل از این مواد برای ساختن آهنربای دائمی استفاده می‌شود.

در مواد فرومغناطیس نرم حجم حوزه‌های مغناطیسی به‌راحتی تغییر می‌کند و پس از خروج از میدان مغناطیس خارجی مجدداً به حالت اولیه برمی‌گردد؛ مانند آهن. از این مواد برای ساختن آهنربای موقت استفاده می‌شود.

۱۹ **گزینه ۳**

گام اول: باتوجه‌به اینکه جریان‌های ناهم‌سو یکدیگر را می‌رانند بردار نیروی وارد بر سیم (۲) از طرف سیم‌های (۱) و (۳) را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم.

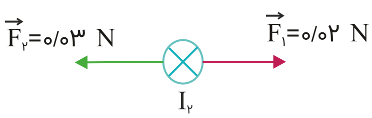


گام دوم: باتوجه‌به قانون سوم نیوتون نیرویی که سیم (۱) به سیم (۲) وارد می‌کند با نیرویی که سیم (۲) به سیم (۱) وارد می‌کند هم‌اندازه است. پس نیروی وارد بر یک متر از سیم (۱) از طرف سیم (۲) را محاسبه می‌کنیم:

$$F_B = I_۱\ell_۱B_۲\sin\theta \xrightarrow{\theta=۹۰^\circ} F_B = I_۱\ell_۱B_۲ = ۱\times۱\times۲۰۰\times۱۰^{-۴} \Rightarrow F_B = ۰/۰۲\,N$$
$$F_۱ = ۰/۰۲\,N$$

همچنین نیرویی که سیم (۳) به سیم (۲) وارد می‌کند با نیرویی که سیم (۲) به سیم (۳) وارد می‌کند هم‌اندازه است؛ بنابراین نیروی وارد بر یک متر از سیم (۳) از طرف سیم (۲) را محاسبه می‌کنیم:

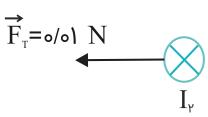
$$F'_B = I_۳\ell_۳B_۳\sin\theta \xrightarrow{\theta=۹۰^\circ} F'_B = ۳\times۱\times۱۰۰\times۱۰^{-۴} \Rightarrow F'_B = ۰/۰۳\,N$$
$$F_۳ = ۰/۰۳\,N$$



گام سوم: نیروی مغناطیسی خالص وارد بر یک متر از سیم (۲) برابر است با:

$$F_T = |F_۳ - F_۱| = ۰/۰۳ - ۰/۰۲ = ۰/۰۱\,N$$

این نیرو در جهت بردار بزرگ‌تر $(\vec{F}_۳)$ است.



۲۰

گزینه ۲

گام اول: با استفاده از قاعدهٔ دست راست جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۱) در نقطهٔ A درون‌سو تعیین می‌شود؛ بنابراین برای صفر شدن میدان مغناطیسی خالص در این نقطه، جهت میدان حاصل از سیم (۲) باید برون‌سو و بنابراین جهت جریان در سیم (۲) به سمت چپ $(\leftarrow)$ باشد.

گام دوم: اندازهٔ میدان حاصل از سیم‌ها در نقطهٔ A برابر است. باتوجه‌به اینکه فاصلهٔ نقطهٔ A از سیم (۲) کمتر از فاصلهٔ آن از سیم (۱) است، مقدار جریان عبوری از سیم (۱) باید بیشتر از مقدار جریان عبوری از سیم (۲) باشد؛ یعنی:

$$I_۱ > I_۲$$

گام سوم: در نقطهٔ B، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های (۱) و (۲) به ترتیب برون‌سو و درون‌سو است. ازطرفی هم جریان عبوری از سیم (۱) بیشتر و هم فاصلهٔ آن از نقطهٔ B کمتر است؛ بنابراین در این نقطه $B_{۱(B)} > B_{۲(B)}$ و جهت میدان مغناطیسی برآیند در این نقطه هم‌جهت با $\vec{B}_{۱(B)}$ یعنی برون‌سو $(\odot)$ خواهد بود.

هندسه

۲۱

گزینه ۳

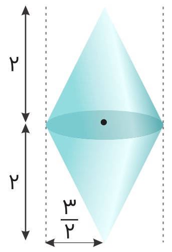
فرض کنیم خط d بر صفحهٔ P عمود باشد. در این صورت اگر خط دلخواهی مانند Δ، از نقطهٔ A به‌موازات صفحهٔ P رسم کنیم، آنگاه خط Δ با حداقل یکی از خطوط صفحهٔ P مانند خط Δ' موازی خواهد بود.
از طرفی چون d بر صفحهٔ P عمود است، پس $\Delta || \Delta'$ و $d \perp \Delta$.
یعنی در این حالت خطی که از نقطهٔ A به‌موازات صفحهٔ P رسم شود، بر خط d عمود خواهد بود.

۲۲

گزینه ۴

باتوجه‌به شکل زیر، شکل حاصل دو مخروط به شعاع قاعدهٔ $r = \frac{۳}{۲}$ و ارتفاع $h = ۲$ است. پس حجم آن برابر است با:

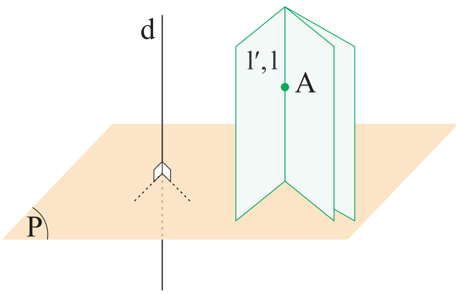
$$۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h) = ۲(\frac{۱}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۲ \times ۲) = ۳\pi$$



۲۳

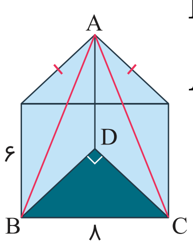
گزینه ۴

از نقطهٔ A، خط l را به موازات خط d رسم می‌کنیم. کلیهٔ صفحات گذرنده از A و موازی با d، شامل خط l می‌باشند و برعکس (به‌جز صفحه‌ای که شامل d باشد). حال از نقطهٔ A ، خط l' را عمود بر صفحهٔ P رسم می‌کنیم. کلیهٔ صفحات گذرنده از A و عمود بر P، شامل خط l' می‌باشند و برعکس. پس جواب مسئله، صفحهٔ گذرنده از l و l' است. دو خط l و l' حداقل یک نقطهٔ برخورد دارند (نقطهٔ A)، پس متقاطع یا منطبق‌اند. اگر l و l' متقاطع باشند، یک و تنها یک صفحه شامل هر دوی آن‌ها وجود دارد، درنتیجه مسئله یک جواب دارد. اگر l و l' برهم منطبق باشند، بی‌شمار صفحه از آن‌ها می‌گذرد و مسئله بی‌شمار جواب دارد. پس باید حالتی را بررسی کنیم که l بر l' منطبق است. در این صورت چون $l'\perp P$ و l بر l' منطبق است، $l\perp P$ و چون صفحهٔ P بر یکی از دو خط موازی l و d عمود شده است، بر دیگری هم عمود است ($d\perp P$).



۲۴

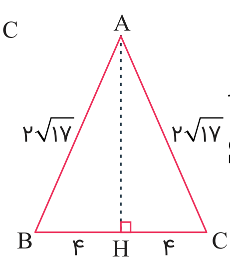
گزینه ۴



$$BD^۲ + CD^۲ = BC^۲ \Rightarrow x^۲ + x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x^۲ = ۳۲ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۲}$$

$$AB^۲ = AD^۲ + BD^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۳۶ + ۳۲ \Rightarrow AB^۲ = ۶۸ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۷}$$

برای یافتن مساحت مثلث ABC، طول ارتفاع وارد بر BC را می‌یابیم:



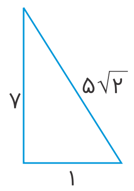
$$AH^۲ = AC^۲ - HC^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۶۸ - ۱۶} = \sqrt{۵۲} \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۱۳} \times ۸ = ۸\sqrt{۱۳}$$

۲۵

گزینه ۲

اضلاع مثلث در قاعدهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند. پس داریم:



نکته: حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ b و a و وتر c حول وتر برابر $\frac{\pi}{3}\left(\frac{a^2b^2}{c}\right)$ است:

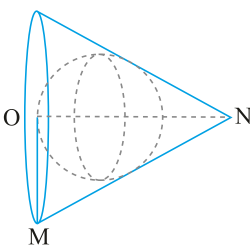
$$V = \frac{\pi}{3} \times \frac{49}{5\sqrt{2}} = \frac{49\pi}{15\sqrt{2}} = \frac{49\sqrt{2}\pi}{30}$$

گزینه ۳

ابتدا با استفاده از معادلهٔ خط d، محل برخورد این خط با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$۳x - ۴y - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور x ها} : N(۴, ۰) \\ \text{محل برخورد با محور y ها} : M(۰, -۳) \end{cases}$$

مطابق شکل زیر، حجم حاصل از دوران ناحیهٔ سایه‌زده‌شده حول خط $y = ۰$، یک مخروط با شعاع قاعدهٔ OM و ارتفاع ON است که یک کره با شعاع $OC = BC = r$ از آن جدا شده است، بنابراین برای محاسبهٔ حجم ناحیهٔ سایه‌زده باید ابتدا اندازهٔ شعاع کره را به دست آوریم. در شکل زیر و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMN بر اساس رابطهٔ فیثاغورس داریم:

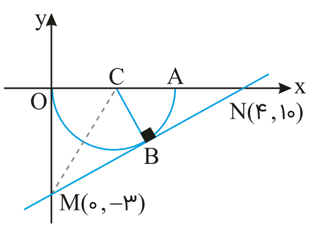


$$MN^۲ = OM^۲ + ON^۲ \Rightarrow MN = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

از طرفی دو مثلث MOC و MBC بنابر حالت (وتر و یک ضلع) همنهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن‌ها باهم برابر خواهد بود، پس:

$$OM = MB = ۳$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCN داریم:



$$\begin{cases} BN = MN - MB \xrightarrow[MB=۳]{MN=۵} BN = ۵ - ۳ = ۲ \\ CN = ON - OC = ۴ - r \\ BC = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow CN^۲ = BC^۲ + BN^۲ \Rightarrow (۴ - r)^۲ = r^۲ + ۴ \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}$$

حال حجم حاصل از دوران برابر است با:

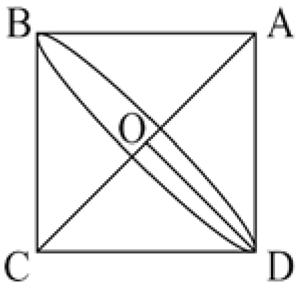
$$V = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{کره}}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi(OM)^۲ \times ON = \frac{۱}{۳}\pi \times ۹ \times ۴ = ۱۲\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \times (\frac{۳}{۲})^۳ = ۴/۵\pi$$

$$V = ۱۲\pi - ۴/۵\pi = ۷/۵\pi$$

۲۷ گزینه ۱



می‌دانیم:

$$AO = \frac{۱}{۲}\ ,\ OD = \frac{۱}{۲}\ ,\ BO = \frac{۱}{۲}$$

$$V_{\text{مخروط بالا}} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳}\pi \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۲۴}$$

به همین ترتیب:

$$V_{\text{مخروط پایین}} = \frac{\pi}{۲۴}$$

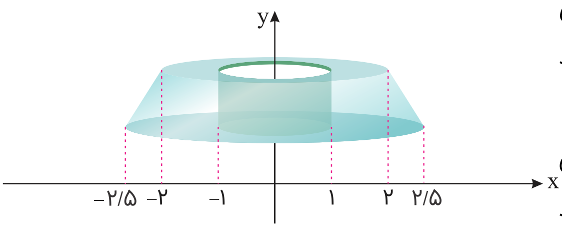
درنتیجه داریم:

$$V_{\text{کل}} = ۲ \times \frac{\pi}{۲۴} = \frac{\pi}{۱۲}$$

۲۸ گزینه ۳

از بین پاره‌خط‌های تشکیل‌دهندهٔ ذوزنقه، فقط یک خط مایل وجود دارد که همان ساق غیرقائم است و باتوجه‌به اینکه این پاره‌خط روی خط $y = -۲x + ۶$ قرار دارد، می‌توانیم طول رأس مجهول ذوزنقه را که عرضی برابر ۲ دارد بیابیم:

$$y = -۲x + ۶ \xrightarrow{y=۲} ۲ = -۲x + ۶ \Rightarrow x = ۲$$



باتوجه‌به نمودار کشیده‌شده، شکل حاصل از دوران ذوزنقه، یک مخروط ناقص است که یک استوانه از داخل آن برداشته شده است. ابتدا حجم مخروط ناقص را محاسبه می‌کنیم.

حجم این مخروط درواقع حجم مخروط کاملی است که مخروط بالایی از آن حذف شده است. ارتفاع مخروط کامل از $y = ۱$ تا محل برخورد خط $y = -۲x + ۶$ با محور yها است که عرض از مبدأ این خط یعنی ۶ است؛ پس ارتفاع مخروط کامل $۶ - ۱ = ۵$ است و شعاع قاعدهٔ آن هم برابر $r = ۲/۵$ است.

$$V_{\text{مخروط کامل}} = \frac{۱}{۳}\pi(۲/۵)^۲\,(۵) = \frac{۳۱/۲۵\pi}{۳} \simeq ۳۱/۲۵$$

در مخروط حذف‌شده شعاع قاعده $r = ۲$ و ارتفاع برابر $۶ - ۲ = ۴$ است، پس داریم:

$$V_{\text{مخروط محذوف}} = \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲\,(۴) = \frac{۱۶\pi}{۳} \simeq ۱۶$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط کامل}} - V_{\text{مخروط محذوف}} \simeq ۳۱/۲۵ - ۱۶ = ۱۵/۲۵$$

حال حجم استوانهٔ برداشته‌شده را برای کم کردن از حجم کل محاسبه می‌کنیم؛ باتوجه‌به شکل شعاع قاعدهٔ این استوانه $r = ۱$ و ارتفاع آن هم $h = ۱$ است:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi(۱)^۲\,(۱) = \pi \simeq ۳$$

$$\text{حجم شکل} \simeq ۱۵/۲۵ - ۳ = ۱۲/۲۵$$

۲۹ گزینه ۳

شکل حاصل از دوران مستطیل بزرگ‌تر، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ $۲ + ۴ = ۶$ و ارتفاع ۲ است که استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۲ از آن جدا شده است. پس حجم آن برابر است با:

$$۲\pi((۴ + ۲)^۲ - ۲^۲) = ۶۴\pi$$

به همین ترتیب حجم شکل حاصل از دوران مستطیل کوچک‌تر برابر است با:

$$۱ \times \pi\left((۳ + \frac{۱}{۲} + ۲)^۲ - (۲ + \frac{۱}{۲})^۲\right) = ۲۴\pi$$

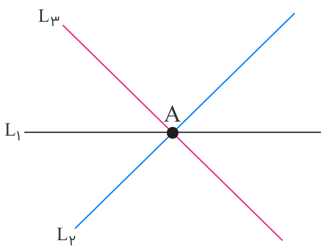
$$\text{حجم موردنظر} = ۶۴\pi - ۲۴\pi = ۴۰\pi$$

۳۰

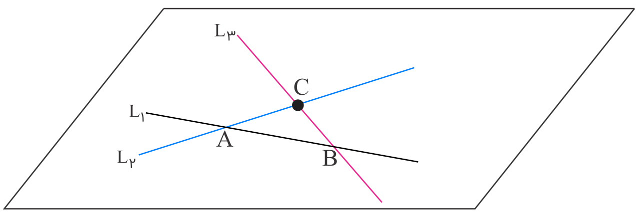
گزینه ۴

فرض کنیم این سه خط، دوبه‌دو متقاطع‌اند. محل برخورد L_1 و L_2 را A می‌نامیم. ازآنجاکه L_3 باید L_1 و L_2 را قطع کند، دو حالت داریم:

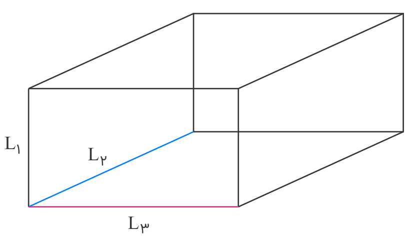
۱) خط L_3، دو خط L_1 و L_2 را در A قطع می‌کند، در این صورت هر سه خط در نقطهٔ A مشترک‌اند، پس همرس‌اند. اما لزوماً در یک صفحه قرار نمی‌گیرند.



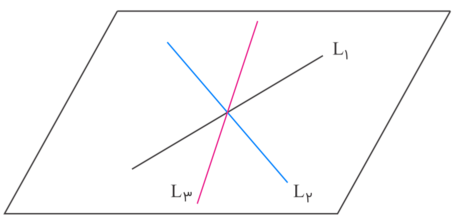
۲) خط L_3، L_1 و L_2 را به‌ترتیب در B و C قطع می‌کند (B و C از A متمایزند)، در این صورت سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط قرار ندارند، پس تشکیل یک صفحه می‌دهند و چون دو نقطه از هرکدام از این خطوط در این صفحه قرار دارند، هر سه خط در این صفحه قرار دارند.



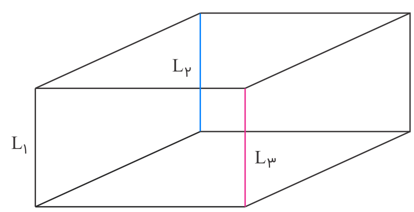
گزینهٔ‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب باتوجه‌به شکل‌های ۱، ۲ و ۳ رد می‌شوند.



(۱)



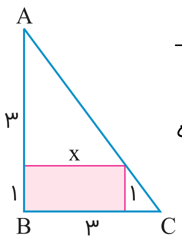
(۲)



(۳)

۳۱ گزینه ۱

برای به دست آوردن طول مستطیل از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:



$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{x}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۹}{۴}$$

با دوران شکل حاصل حول پاره‌خط AB ، یک مخروط به دست می‌آید که از درون آن یک استوانه خارج شده است. پس حجم استوانه را از حجم مخروط کم می‌کنیم:

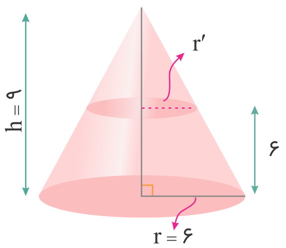
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ H = \frac{۱}{۳}\pi (۳)^۲ (۴) = ۱۲\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi (\frac{۹}{۴})^۲ (۱) = \frac{۸۱}{۱۶}\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم شکل حاصل} = ۱۲\pi - \frac{۸۱}{۱۶}\pi = \frac{۱۹۲ - ۸۱}{۱۶}\pi = \frac{۱۱۱\pi}{۱۶}$$

۳۲ گزینه ۴

شکل را رسم می‌کنیم:



$$\text{تالس}: \frac{r'}{۶} = \frac{۳}{۹} \Rightarrow r' = ۲$$

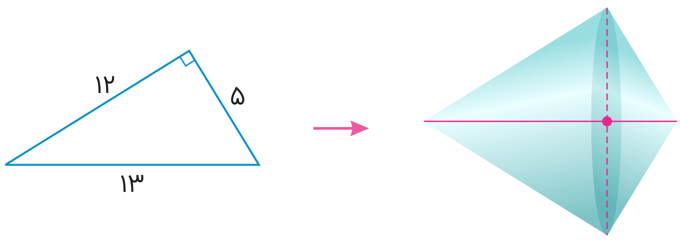
$$\text{مخروط بزرگ}: V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi (۶)^۲ (۹) = ۱۰۸\pi$$

$$\text{مخروط کوچک}: V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r'^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi (۲)^۲ (۳) = ۴\pi$$

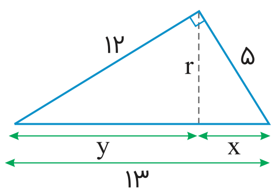
$$\text{مخروط ناقص}: V = V_۲ - V_۱ = ۱۰۸\pi - ۴\pi = ۱۰۴\pi$$

۳۳ گزینه ۳

اضلاع مثلث در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کند، پس نوع آن قائم‌الزاویه است.



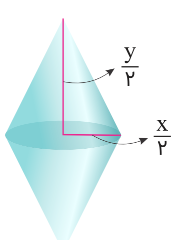
مطابق شکل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، دو مخروط به هم چسبیده به وجود می‌آید که شعاع آن‌ها برابر با ارتفاع وارد بر وتر است. برای به دست آوردن موارد لازم از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:



$$۵ \times ۱۲ = ۱۳r \Rightarrow r = \frac{۶۰}{۱۳}$$
$$۲۵ = ۱۳x \Rightarrow x = \frac{۲۵}{۱۳}$$
$$۱۴۴ = ۱۳y \Rightarrow y = \frac{۱۴۴}{۱۳}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۶۰}{۱۳}\right)^{۲}\left(\frac{۲۵}{۱۳}\right) + \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۶۰}{۱۳}\right)^{۲}\left(\frac{۱۴۴}{۱۳}\right) = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۶۰}{۱۳}\right)^{۲}\pi\left(\frac{۲۵}{۱۳} + \frac{۱۴۴}{۱۳}\right)$$
$$= \frac{۱}{۳} \times \pi \times \left(\frac{۶۰}{۱۳}\right)^{۲}(۱۳) = \frac{۳۶۰۰}{۱۳ \times ۳}\pi = \frac{۱۲۰۰}{۱۳}\pi$$

۳۴ گزینه ۱



مطابق شکل از دوران گفته‌شده دو مخروط به هم چسبیده از قاعده به وجود می‌آید، بنابراین حجم شکل فوق دو برابر حجم مخروطی است که شعاع قاعدهٔ آن $\frac{x}{۲}$ و ارتفاع آن $\frac{y}{۲}$ است.

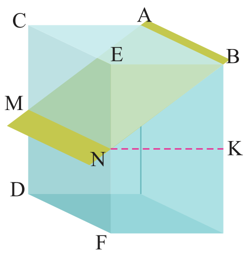
$$V = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi \times \left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{y}{۲}\right) = \frac{x^{۲}y}{۱۲}\pi$$

۳۵ گزینه ۴

به شکل زیر دقت کنید:

مثلث BNK قائم‌الزاویه است و چون $NK = ۴$ و $BK = ۳$ است، پس $BN = ۵$.

مقطع حاصل مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ است، لذا $S = ۴ \times ۵ = ۲۰$.



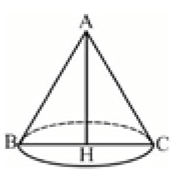
۳۶ گزینه ۲

$$V_{\text{هاشورخورده}} = \pi R^{۲}(۲R) - \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$$

$$V_{\text{هاشورنخورده}} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۳۷ گزینه ۴

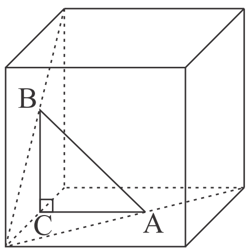
از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ حول ارتفاع AH یک مخروط به شعاع قاعدهٔ $BH = \sqrt{۳}$ و ارتفاع $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳}) = ۳$ ایجاد می‌شود:



$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۳})^{۲}(۳) = ۳\pi$$

۳۸ گزینه ۳

مکعبی به طول یال $۴\sqrt{۲}$ به‌صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبهٔ اندازهٔ AB است.



اندازهٔ AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ AB را تعیین می‌کنیم:

$$\mathrm{BC}^۲ + \mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ \Rightarrow ۲(۲\sqrt{۲})^۲ = \mathrm{AB}^۲ \Rightarrow \mathrm{AB}^۲ = ۲ \times ۸ = ۱۶ \Rightarrow \mathrm{AB} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۳۹ گزینه ۲

طبق قانون فیثاغورس : $\mathrm{BC} = \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = ۶$

در اثر دوران شکل حول محور AC، مخروطی خواهیم داشت که یک حفرهٔ استوانه‌ای (به دلیل دوران مربع) دارد، پس حجم حاصل از دوران قسمت رنگی برابر است با:

$$\mathrm{V}_{\text{قسمت رنگی}} = \mathrm{V}_{\text{مخروط}} - \mathrm{V}_{\text{استوانه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۶)^۲(۸) - \pi(۲)^۲(۲) = ۹۶\pi - ۸\pi = ۸۸\pi$$

۴۰

گزینه ۳

درصورتی‌که خط d و صفحهٔ P متقاطع باشند، آنگاه می‌توان صفحهٔ P' را از نقطهٔ O به موازات P رسم کرد. در این صورت خط d، صفحهٔ P' را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند. خطی که نقطهٔ O را به B وصل می‌کند، تنها خطی است که از O می‌گذرد و موازی صفحهٔ P بوده و d را قطع می‌کند. درصورتی‌که $d \subset P$، چنین خطی قابل رسم نیست و درصورتی‌که صفحهٔ گذرنده بر O و d، موازی صفحهٔ P باشد، بی‌شمار خط با این شرایط قابل رسم است. درصورتی‌که $d||P$، یکی از دو حالت قبل اتفاق می‌افتد.