ریاضی

۱ گزینه ۴

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۱)^{۲} - ۴(۳)(۷) = ۱ - ۸۴ = -۸۳ \Rightarrow \Delta < ۰$$

معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲ گزینه ۱

$$(x-۳)(x-۵) = -۳(۵-x)$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۳(x-۵)$$
$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (x-۵)\left((x-۳)-۳\right) = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۵)(x-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = ۶ \end{cases}$$

پس معادله دو جواب مثبت دارد.

۳ گزینه ۲

$$۱)\ x^{۲} - ۴x + ۲ = -۱ \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۱) = ۰ \Rightarrow |x_{۲} - x_{۱}| = |۳-۱| = ۲$$

$$۲)\ ۲x^{۲} - ۳۰ = ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} = ۳۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱۵$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{۱۵} \Rightarrow |x_{۲} - x_{۱}| = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$۳)\ ۳x^{۲} = ۶ \Rightarrow x^{۲} = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow |x_{۲} - x_{۱}| = ۲\sqrt{۲}$$

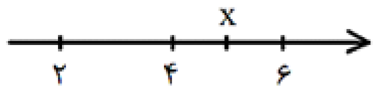
$$۴)\ (۲x-۱)^{۲} = ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ = \pm ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \\ ۲x - ۱ = -۱ \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \Rightarrow |x_{۲} - x_{۱}| = |۱ - ۰| = ۱$$

پس قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها در "گزینهٔ ۲" از بقیه بزرگ‌تر است.

۴

گزینه ۱

اگر x جواب باشد، فاصلهٔ آن از عدد ۴ برابر $|x-۴|$ است و باید کمتر از ۲ باشد، پس $|x-۴|<۲$.



۵

گزینه ۲

عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a>۰$ و $\Delta<۰$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$۱)\ \ a>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \quad (I)$$

$$f(x)=(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$$

$$۲)\ \ \Delta<۰ \Rightarrow ۶^۲-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰$$

$$\Rightarrow ۳۶-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰ \xrightarrow{\div ۴} ۹-(m-۱)(۲m+۱)<۰$$

$$\Rightarrow ۹-۲m^۲+m+۱<۰ \Rightarrow -۲m^۲+m+۱۰<۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-m-۱۰>۰ \Rightarrow (۲m-۵)(m+۲)>۰$$

$$\Rightarrow m>\frac{۵}{۲} \text{ یا } m<-۲ \quad (II)$$

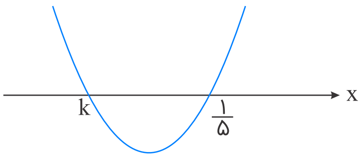
بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I)\ \cap\ (II): m>\frac{۵}{۲} \Rightarrow m>۲/۵$$

۶ گزینه ۱

نامعادلهٔ $ax^۲+۹x-a+۳>۰$ وقتی برقرار است که نمودار سهمی $y=ax^۲+۹x-a+۳$ بالای محور xها قرار بگیرد.

چون مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $(-\infty,k)\cup(\frac{۱}{۵},+\infty)$ است، نتیجه می‌گیریم k و $\frac{۱}{۵}$ نقاط برخورد نمودار با محور xها هستند و مقدار تابع به ازای آن‌ها صفر می‌شود.



$$ax^۲+۹x-a+۳=۰\xrightarrow{x=\frac{۱}{۵}}\frac{a}{۲۵}+\frac{۹}{۵}-a+۳=۰\Rightarrow\frac{a+۴۵-۲۵a+۷۵}{۲۵}=۰$$

$$۱۲۰-۲۴a=۰\Rightarrow a=۵$$

$$ax^۲+۹x-a+۳=۵x^۲+۹x-۲=(۵x-۱)(x+۲)>۰\Rightarrow x<-۲ \text{ یا } x>\frac{۱}{۵}$$

بنابراین $k=-۲$ است. حاصل $a+k$ را می‌خواهیم:

$$a+k=۵-۲=۳$$

۷ گزینه ۳

رابطهٔ زوج مرتبی زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشند. اگر در رابطه دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول برابر باشند برای اینکه رابطه تابع باشد، می‌بایست مؤلفهٔ دوم یکسان نیز داشته باشند.

$$f=\{(-۴,۲m+۳),(۴,۱۱),(۳,-۶),(-۴,۹),(۳,n+۱)\}$$

$$(-۴,۲m+۳)=(-۴,۹)\Rightarrow ۲m+۳=۹\Rightarrow ۲m=۶\Rightarrow m=۳$$

$$(۳,-۶),(۳,n+۱)\Rightarrow n+۱=-۶\Rightarrow n=-۷$$

$$\Rightarrow n+۲m=-۷+۲(۳)=-۱$$

۸ گزینه ۱

چون دو زوج مرتب $(-۴, ۷)$ و $(-۴, ۲a+۱)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان هستند، پس برای تابع بودن می‌بایست مؤلفهٔ دوم یکسان نیز داشته باشند؛ درنتیجه داریم:

$$۲a+۱=۷ \Rightarrow ۲a=۷-۱=۶ \Rightarrow a=۳$$
$$\Rightarrow f=\{(-۴, ۷), (۳, ۲b), (۳, b+۳)\}$$

دو زوج مرتب $(۳, b+۳)$ و $(۳, ۲b)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان هستند، پس می‌بایست مؤلفهٔ دوم یکسان نیز داشته باشند.

$$۲b=b+۳ \Rightarrow b=۳ \Rightarrow ۲a-b=۶-۳=۳$$

۹ گزینه ۲

نمودار رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند که باتوجه‌به این مفهوم نمودار مربوط به گزینهٔ "۲" تابع است، زیرا هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۰ گزینه ۱

$$D_f=\{۱, ۲, a\}$$
$$R_f=\{۱, b, c\}$$

ازطرفی $f(a)=f(۲)$ پس: $c=۱$

پس باتوجه‌به R_f و برابری دامنه و برد تابع، باید $b=۲$ که در این صورت داریم:

$$R_f=\{۱, ۲\}$$
$$D_f=\{۱, ۲, a\}$$

در این صورت $a=۱$ یا $a=۲$ ؛ اما دقت کنید که اگر $a=۱$ شود، f نمی‌تواند تابع باشد، پس $a=۲$ و مقدار $a+b+c$ برابر ۵ می‌شود.

۱۱ **گزینه ۳**

با استفاده از مختصات مبدأ $(\text{۰},\text{۰})$ و نقطهٔ $(\text{۲},\text{۷})$ شیب خط را تعیین می‌کنیم:

$$m=\frac{\text{۷}-\text{۰}}{\text{۲}-\text{۰}}=\frac{\text{۷}}{\text{۲}}$$

معادلهٔ خط گذرنده از مبدأ مختصات به صورت $y=mx$ می‌باشد. بنابراین تابع خطی موردنظر $f(x)=\frac{\text{۷}}{\text{۲}}x$ است.

$$f(\text{۰/۱})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}}\times\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}=\frac{\text{۷}}{\text{۲۰}}$$
$$f(-\text{۰/۱})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}}\times\frac{-\text{۱}}{\text{۱۰}}=-\frac{\text{۷}}{\text{۲۰}}$$
$$f(\text{۰/۱})-f(-\text{۰/۱})=\frac{\text{۷}}{\text{۲۰}}-(-\frac{\text{۷}}{\text{۲۰}})=\frac{\text{۱۴}}{\text{۲۰}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۰}}=\text{۰/۷}$$

روش سریع:
اگر نمودار تابع خطی از مبدأ مختصات و نقطهٔ $f(a)=b$ عبور کند، خواهیم داشت:

$$f(x)-f(-x)=\text{۲}(\frac{b}{a}x)$$

بنابراین برای خط گذرنده از مبدأ و نقطهٔ $f(\text{۲})=\text{۷}$ داریم:

$$f(\text{۰/۱})-f(-\text{۰/۱})=\text{۲}\times\frac{\text{۷}}{\text{۲}}\times\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۰}}=\text{۰/۷}$$

۱۲ **گزینه ۳**

برد این تابع $\{\text{۲},-\text{۱},\text{۲}x+\text{۱}\}$ است که باید مجموعه دو عضوی باشد پس:

$$\begin{cases}\text{۲}x+\text{۱}=-\text{۱}\Rightarrow \text{۲}x=-\text{۲}\Rightarrow x=-\text{۱}\\ \text{۲}x+\text{۱}=\text{۲}\Rightarrow \text{۲}x=\text{۱}\Rightarrow x=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{\text{۱}}+x_{\text{۲}}=-\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

۱۳ گزینه ۴

برای پیدا کردن برد تابع بهتر است نمودار آن را رسم کنیم.

با استفاده از روش نقطه‌یابی داریم:

$$f(x)=\begin{cases}2x & ; x\geq 1\\ 2 & ; 0<x<1\\ -x+2 & ; x\leq 0\end{cases}$$

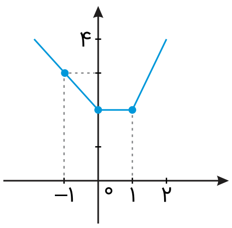
جدول مربوط به ضابطهٔ اول: $y_1=2x$

	۱	۲
$2x$	۲	۴

جدول مربوط به ضابطه سوم: $y_3=-x+2$

	-1	۰
$-x+2$	۳	۲

نمودار ضابطهٔ دوم هم به‌صورت تابع ثابت $y=2$ است.



بنابراین برد تابع به‌صورت $[+2\,,\,+\infty)$ است.

۱۴ گزینهٔ ۴

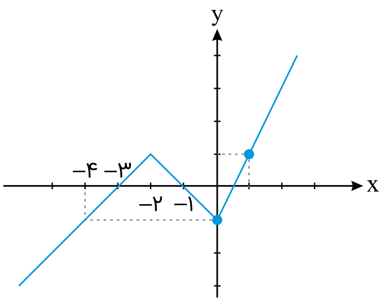
نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:

$$x \le 0 : y_1 = -|x+2|+1$$

x	۰	۳-	۴-
y	۱-	۰	۱-

$$x > 0 : y_2 = 2x - 1$$

x	۰	۱
y	۱-	۱



همان‌طور که از شکل پیداست نمودار تابع g از تمام نواحی مختصات می‌گذرد.

۱۵ گزینهٔ ۱

قبل از انتقال رأس نمودار نقطهٔ $(1, 3)$ بوده و نمودار از نقطهٔ $(0, 2)$ می‌گذرد. با مختصات این دو نقطه مقدار a را تعیین می‌کنیم:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{2-3}{(0-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

مقدار a (ضریب x^2) قبل و بعد از انتقال یکسان می‌باشد. باتوجه‌به $a = -1$ گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند. مختصات رأس سهمی پس از انتقال $(2, -1)$ می‌باشد. برای آنکه تعیین کنیم کدام‌یک از گزینه‌های باقی‌مانده مربوط به سهمی پس از انتقال می‌باشد، مختصات رأس را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم:

گزینهٔ ۱:

$$-1 = -(2)^2 + 4(2) - 5 \Rightarrow -1 = -1$$

گزینهٔ ۴:

$$-1 = -(2)^2 + 4(2) - 3 \Rightarrow -1 \ne 1$$

مختصات رأس $(2, -1)$ در تابع گزینهٔ ۴ برقرار نمی‌باشد. بنابراین پاسخ صحیح گزینهٔ ۱ می‌باشد.

۱۶ گزینه ۴

نقطهٔ شکست در نمودار تابع $(b\,,\,c\in\mathbb{R})$ $y=|x+b|+c$، نقطه‌ای به مختصات $(-b\,,\,c)$ است.
شکست نمودار تابع $y=|x+۱|+۱$ نقطهٔ $(-۱,\,۱)$ است و در بین نمودارهای رسم‌شده، نقطهٔ شکست در نمودار گزینهٔ "۴" می‌تواند با نقطهٔ $(-۱,\,۱)$ مطابقت داشته باشد.

۱۷ گزینه ۲

ضابطهٔ سهمی اولیه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y_۱=۲(x-۱)^۲-۳$$

حال با انتقال به چپ و انتقال به پایین این سهمی داریم:

$$y_۲=۲((x+۱)-۱)^۲-۳-۲\Rightarrow y_۲=۲x^۲-۵$$

حال کافی است معادلهٔ $y_۱=y_۲$ را حل کنیم:

$$۲x^۲-۴x-۱=۲x^۲-۵\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

۱۸ گزینه ۳

تابع گویا، تابعی کسری است که در صورت و مخرج کسر آن، توابع چندجمله‌ای قرار می‌گیرند (البته مخرج کسر نباید صفر باشد.) و می‌دانیم در یک تابع چندجمله‌ای، درجهٔ جملات همگی عضو اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ هستند.
در گزینهٔ "۱"، صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای از درجهٔ ۱ هستند.
در گزینهٔ "۲"، بعد از نوشتن $\sqrt[۳]{۷x^۳}=\sqrt[۳]{۷}x$، باز هم صورت و مخرج هر دو، چندجمله‌ای از درجهٔ ۱ می‌شوند.
در گزینهٔ "۳"، در صورت، یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱ داریم. اما در مخرج کسر بعد از نوشتن $\sqrt{۷x}=\sqrt{۷}x^{\frac{۱}{۲}}$، از آن‌جا که $\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{W}$ پس همین گزینه جواب تست است. ضمناً دقت کنید که گزینهٔ "۴" را می‌توان به‌صورت $y=۳=\frac{۳}{۱}$ نوشت که در آن، هم صورت و هم مخرج، چندجمله‌ای از درجهٔ صفر محسوب می‌شوند.

۱۹ گزینه ۴

$$\left[\frac{۲}{۳}x\right]=x-۱$$
$$۰\le\frac{۲}{۳}x-\left[\frac{۲}{۳}x\right]<۱\Rightarrow ۰\le\frac{۲}{۳}x-x+۱<۱$$
$$\Rightarrow -۱\le-\frac{۱}{۳}x<۰\Rightarrow ۰<x\le۳\Rightarrow x=۱,۲,۳$$

مجموع جواب‌ها: ۶

۲۰ گزینه ۲

در مورد الف، دقت بفرمایید که $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$، پس f و g مساوی نیستند.

در مورد ب، اولاً $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ و باتوجه‌به اینکه $|x|^2 = x^2$ خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{|x|^2 - |x| - 2}{|x|^2 - 1} = \frac{(|x| - 2)\cancel{(|x| + 1)}}{(|x| - 1)\cancel{(|x| + 1)}} = \frac{(|x| - 2)}{(|x| - 1)} = g(x)$$

پس f و g باهم مساوی‌اند.

در قسمت پ، داریم: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ولی به‌عنوان‌مثال توجه کنید که:

فرض می‌کنیم $x = \frac{1}{2}$ پس:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2} \\ g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{-1}{2}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

در قسمت ت، توجه نمایید که $D_f = [1, +\infty)$ ولی $D_g = [1, +\infty) \cup \{0\}$ پس $f(x) \neq g(x)$.

۲۱ گزینه ۴

$$y = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow x = 10 - 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = 10 - 2x \Rightarrow f^{-1}(3) = 10 - 6 = 4$$

۲۲ گزینه ۲

$$x = [x] + \underbrace{p_x}_{0 \le \text{اعشار} < 1} \Rightarrow f(x) = \underbrace{2[x]}_{\text{زوج}} + p_x \Rightarrow f(x) = \text{عدد زوج} + \text{عدد اعشاری}$$

پس در دامنهٔ f^{-1}، (عدد اعشاری + عدد زوج) قرار دارد؛ یعنی گزینهٔ (۲).

۲۳ گزینه ۲

$$\sqrt{x + 3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x + 3} = x + 1 \Rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in D \\ x = -2 \notin D \end{cases}$$

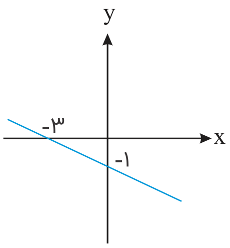
پس نقطهٔ تلاقی f و f^{-1} نقطهٔ $(1, 1)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ خواهد شد.

۲۴ گزینه ۱

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۳}x + h \xrightarrow[f(۳)=-۲]{f^{-۱}(-۲)=۳} -۲ = -\frac{۱}{۳} \times ۳ + h \Rightarrow h = -۱$$

$$f(x) = -\frac{۱}{۳}x - ۱$$

مطابق شکل $f(x)$ از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.



۲۵ گزینه ۲

$$f = \left\{(۲, ۰), (۳, \frac{۱}{۲})\right\}$$

$$\frac{۲}{f} = \left\{(۲, \frac{۲}{۰} = \text{تعریف نشده}), (۳, \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴)\right\} = \{(۳, ۴)\}$$

۲۶

گزینه ۳

اگر f ثابت باشد پس $f(x)=c$ بنابراین:

$$f(m)+f(n)=f(m).f(n) \Rightarrow c+c=c^{۲} \Rightarrow c^{۲}=۲c \Rightarrow c=۲ \Rightarrow f(x)=۲$$

نیمساز ناحیه اول عبارت است از خط $y=x$ پس:

$$(۲n^{۲}-۷n+۱\,,\,-۲) \Rightarrow -۲=۲n^{۲}-۷n+۱ \Rightarrow ۲n^{۲}-۷n+۳=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta=۴۹-۲۴=۲۵ \\ n=\dfrac{۷\pm ۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} n=۳ \\ n=\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

و بر روی نقطه دوم:

$$(m^{۲}-۴m+۶\,,\,۳\times ۲) \Rightarrow ۶=m^{۲}-۴m+۶ \Rightarrow m(m-۴)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m=۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m=۴ \end{cases}$$

بنابراین:

$$[\frac{mn}{۵}]=[\frac{۱۲}{۵}]=[۲/۴]=۲$$

۲۷

گزینه ۲

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنهٔ تعریف این توابع هم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$

با استفاده از رابطهٔ بالا ابتدا دامنهٔ تعریف توابع $f+g$، $f-g$ و $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f=\{(۳,۴),(۲,۶),(۵,۳),(۱,۵)\}\Rightarrow D_f=\{۱,۲,۳,۵\}$$

$$g=\{(۵,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۱)\}\Rightarrow D_g=\{۱,۳,۴,۵\}$$

$$\Rightarrow D_{f\pm g}=\{۱,۳,۵\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}}=D_{f+g}\cap D_{f-g}-\{x\,|\,(f-g)(x)=۰\}=D_{f\pm g}$$

$$f+g=\{(۱,۵+۲),(۳,۴+۲),(۵,۳+۶)\}$$

$$=\{(۱,۷),(۳,۶),(۵,۹)\}$$

$$f-g=\{(۱,۵-۲),(۳,۴-۲),(۵,۳-۶)\}$$

$$=\{(۱,۳),(۳,۲),(۵,-۳)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g}=\left\{(۱,\frac{۷}{۳}),(۳,\frac{۶}{۲}),(۵,\frac{۹}{-۳})\right\}$$

$$=\left\{(۱,\frac{۷}{۳}),(۳,۳),(۵,-۳)\right\}$$

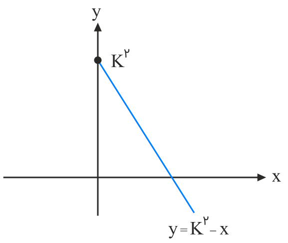
$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}}=\left\{\frac{۷}{۳},۳,-۳\right\}$$

۲۸ گزینه ۲

می‌دانیم دامنهٔ fg برابر با اشتراک دامنهٔ توابع g و f است؛ پس $D_{fg} = [۰, +\infty)$ می‌شود. ضابطهٔ این تابع را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)g(x) = (K + \sqrt{x})(K - \sqrt{x}) = K^۲ - x$$

نمودار این تابع به این شکل است:



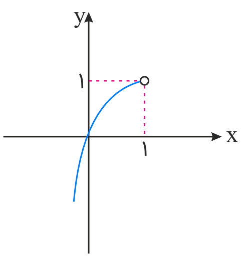
باتوجه‌به شکل، برد تابع $(-\infty, K^۲]$ می‌شود که در صورت سؤال گفته‌شده برابر با $(-\infty, ۴]$ است:

$$K^۲ = ۴ \xrightarrow{K>۰} K = ۲$$

بنابراین $f(x) = ۲ - \sqrt{x}$ می‌شود که برد آن برابر با $(-\infty, ۲]$ است.

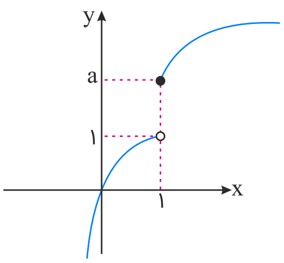
۲۹ گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه $۲x - x^۲ = -(x-۱)^۲ + ۱$، نمودار این ضابطه را در $x < ۱$ رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع f اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هردو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست) یعنی: $a \geq ۱$.

بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



۳۰

گزینه ۳

منظور سؤال این است که $f(x)$ تابع ثابت است، پس $m = n = ۰$ است. حال تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(۰, -۱), (۰, k), (-۱, -۱), (۳k + ۲, ۲k + ۱)\}$$

زوج مرتب‌های $(۰, -۱)$ و $(۰, k)$ مولفهٔ اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفهٔ دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه g تابع باشد باید $k = -۱$ باشد. تابع g به‌صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(۰, -۱), (-۱, -۱)\}$$

$f(x) = -k = ۱$ خواهد بود و درنتیجه $f(\sqrt{۵}) = ۱$ می‌باشد.

۳۱

گزینه ۳

ضابطهٔ آن را به‌صورت $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(۲) = ۸a + ۴b + ۲c + d = ۵ \\ f(۱) = a + b + c + d = -۳ \\ f(۰) = d = ۲ \\ f(-۱) = -a + b - c + d = ۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$a = \frac{۱۰}{۳}, \quad b = -\frac{۷}{۲}, \quad c = -\frac{۲۹}{۶}, \quad d = ۲$$

۳۲

گزینه ۳

برای آنکه سهمی موردنظر در فاصلهٔ $(-۱, ۱)$ غیرکنوا باشد، باید رأس آن در این بازه قرار گیرد.

$$-۱ < \frac{-۲m}{۲(m-۱)} < ۱ \Rightarrow -۱ < \frac{m}{۱-m} < ۱ \Rightarrow \left|\frac{m}{۱-m}\right| = \frac{|m|}{|۱-m|} < ۱ \xrightarrow{m \neq ۱} |m| < |۱-m|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (m - ۱ + m)(m + ۱ - m) < ۰ \Rightarrow ۲m < ۱ \Rightarrow m < \frac{۱}{۲}$$

۳۳

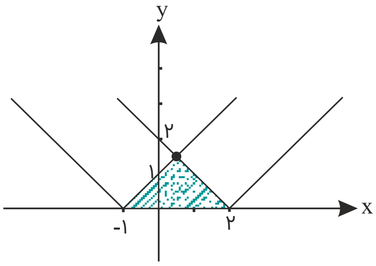
گزینه ۳

$$gof(x_۱) = g(f(x_۱)) = g(y_۱) = z_۱ \Rightarrow (x_۱, z_۱)$$

۳۴ گزینه ۲

$$f(x) = |x+۱|$$

$$g(x) = f(x-۳) = |(x-۳)+۱| = |x-۲|$$



$$|x+۱| = |x-۲| \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = x-۲ \Rightarrow ۱ = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \\ x+۱ = -x+۲ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

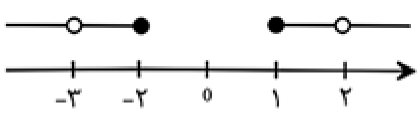
$$x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = \left|۱+\frac{۱}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow S = \frac{۳ \times \frac{۳}{۲}}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

۳۵ گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{x^۲+x-۲} \Rightarrow x^۲+x-۲ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۲ \ \cup \ x \geq ۱$$

$$g(x) = \log(۲-x)^۲ \Rightarrow (۲-x)^۲ > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{۲\}$$

$$D_{g(f(x))} = \left\{ x \leq -۲ \cup x \geq ۱ \;\middle|\; \underbrace{\sqrt{x^۲+x-۲} = ۲}_{x^۲+x-۶=۰ \ \Rightarrow \ x=۲ \ , \ x=-۳} \right\}$$



بنابراین دامنهٔ $(gof)(x)$ شامل اعداد صحیح $\{-۳, -۱, ۰, ۲\}$ نیست.

۳۶ گزینه ۱

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می‌کنیم.

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}}x\geq ۱$$
$$\Rightarrow x-۱\geq ۰\Rightarrow \sqrt{x-۱}\geq ۰\Rightarrow -\sqrt{x-۱}\leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\leq ۲\Rightarrow y\leq ۲\Rightarrow R_f=(-\infty\,,\,۲]\Rightarrow D_{f^{-۱}}=(-\infty\,,\,۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x-۱=(۲-y)^۲$$
$$\Rightarrow x-۱=۴-۴y+y^۲\Rightarrow x=۵-۴y+y^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y=x^۲-۴x+۵\,;\,x\leq ۲$ است.

۳۷ گزینه ۴

$$f^{-۱}(۱۰)=a\Rightarrow f(a)=۱۰\Rightarrow g(a)+۳\sqrt{g(a)}=۱۰$$
$$\Rightarrow \underbrace{(\sqrt{g(a)}+۵)}_{\text{مثبت}}(\sqrt{g(a)}-۲)=۰\Rightarrow g(a)=۴\Rightarrow g^{-۱}(۴)=a$$
$$\Rightarrow ۳\sqrt{۷-۳}=a\Rightarrow a=۶$$

۳۸ گزینه ۴

$$g(۲)=a\Rightarrow ۲=g^{-۱}(a)$$

فرض کنید $۳x-۱=a$ در این صورت:

$$f(\frac{۱+a}{۳})=۲g^{-۱}(a)=۴\Rightarrow \frac{۱+a}{۳}=f^{-۱}(۴)$$
$$\Rightarrow \frac{۱+a}{۳}=۶\Rightarrow a=۱۷$$

۳۹ گزینه ۱

چون نمودار تابع f در نقطهٔ $A(۱,۳)$، نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند؛ پس این نقطه روی هر دو تابع f و f^{-1} قرار دارد. به‌عبارت‌دیگر $f(۱)=۳$ و $f^{-1}(۱)=۳$ و بنابراین $f(۳)=۱$؛ یعنی داریم:

$$\begin{cases} f(۱)=۳ \Rightarrow -۱+a+b=۳ \Rightarrow a+b=۴ \\ f(۳)=۱ \Rightarrow -۲۷+۳a+b=۱ \Rightarrow ۳a+b=۲۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a=۲۴$$

$$\Rightarrow a=۱۲ \Rightarrow b=-۸$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^۳+۱۲x-۸ \Rightarrow f(-۲)=۸-۲۴-۸=-۲۴$$

توجه شود که تابع $f(x)=-x^۳+۱۲x-۸$ در دامنهٔ $[-۲,۲]$ وارون‌پذیر است، ولی در کل $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر نیست. (زیرا در کل $\mathbb{R}$، یک‌به‌یک نیست.)

۴۰ گزینه ۴

ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس کمترین مقدار تابع درجه دوم، همان عرض رأس سهمی است، بنابراین ابتدا طول رأس سهمی را حساب کرده، آن را به‌جای x می‌گذاریم تا عرض رأس سهمی نیز به دست آید:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲(۸)}=\frac{۱}{۴}$$

$$y_S=۸(\frac{۱}{۴})^۲-۴(\frac{۱}{۴})+۱=۸(\frac{۱}{۱۶})-۱+۱=\frac{۱}{۲}$$