ریاضی

۱ گزینه ۳

چون سه عدد موردنظر، مضارب متوالی ۵ هستند، پس می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت $x+5$، x و $x-5$ در نظر بگیریم:

$$(x-5)^2 + x^2 + (x+5)^2 = 725$$
$$\Rightarrow x^2 - \cancel{10x} + 25 + x^2 + x^2 + \cancel{10x} + 25 = 725$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 725 - 50 = 675 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = \pm 15$$
$$\xrightarrow{\text{طبیعی } x} \begin{cases} x-5=10 \\ x=15 \\ x+5=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب سه عدد}} 10 \times 15 \times 20 = 3000$$

۲ گزینه ۱

دنبالهٔ حسابی را a_n با قدر نسبت d و دنبالهٔ هندسی را b_n با قدر نسبت q فرض می‌کنیم. داریم:

$$a_3 = 1 + 2d = b_1$$
$$a_6 = 1 + 5d = b_2$$
$$a_{11} = 1 + 10d \Rightarrow 2a_{11} = 2 + 20d = b_3$$

باید رابطهٔ $b_2^2 = b_1 b_3$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow (1+2d)(2+20d) = (1+5d)^2$$
$$\Rightarrow 2 + 24d + 40d^2 = 1 + 10d + 25d^2 \Rightarrow 15d^2 + 14d + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 14^2 - 4 \times 15 = 136 \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \dfrac{-14 + \sqrt{136}}{30} = \dfrac{-7 + \sqrt{34}}{15} \\ d_2 = \dfrac{-14 - \sqrt{136}}{30} = \dfrac{-7 - \sqrt{34}}{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 = \frac{-14}{15} \quad , \quad d_1 d_2 = \frac{1}{15}$$

حال برای قدر نسبت دنبالهٔ هندسی داریم:

$$q = \frac{2 + 20d}{1 + 5d} = \frac{(4 + 20d) - 2}{1 + 5d} = 4 - \frac{2}{1 + 5d} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 4 - \dfrac{2}{1 + 5d_1} \\ q_2 = 4 - \dfrac{2}{1 + 5d_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 = 8 - 2\left(\frac{1}{1+5d_1} + \frac{1}{1+5d_2}\right) = 8 - 2\left(\frac{1 + 5d_2 + 1 + 5d_1}{(1+5d_1)(1+5d_2)}\right)$$

$$\Rightarrow q_1 + q_2 = 8 - 2\left(\frac{2 + 5(d_1 + d_2)}{25d_1 d_2 + 5(d_1 + d_2) + 1}\right)$$
$$= 8 - 2\left(\frac{2 + 5(\frac{-14}{15})}{25(\frac{1}{15}) + 5(\frac{-14}{15}) + 1}\right) = \frac{16}{3}$$

۳ گزینه ۱

محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده است پس $f(1) = 0$ است. محور عرض‌ها را در -6 قطع کرده است پس $f(0) = -6$ و از نقطهٔ $(-2, -6)$ عبور کرده است پس $f(-2) = -6$، حال داریم:

$$f(0) = -6 \Rightarrow 0 + 0 + c = -6 \Rightarrow c = -6$$
$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 6 = 0 \Rightarrow a + b = 6 \quad (1)$$
$$f(-2) = -6 \Rightarrow 4a - 2b + c = -6 \xrightarrow{c=-6} 4a - 2b = 0 \xrightarrow{\div 2} 2a = b$$
$$\xrightarrow{(1)} a + 2a = 6 \Rightarrow 3a = 6$$
$$\Rightarrow a = 2, b = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 - 6 = 2 - 10 = -8$$

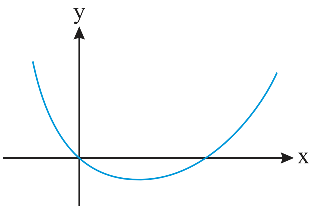
۴ گزینه ۴

حالت اول: یک ریشه و یک عرض از مبدأ، پس باید $\Delta = ۰$:

$$\Delta = m^۲ - ۴(۱)(m - \frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۲ = ۰$$

این معادله دارای $\Delta > ۰$ و درنتیجه دو مقدار برای m وجود دارد.

حالت دوم: اگر $c = ۰$ آنگاه نمودار شبیه شکل زیر می‌شود:



$$c = ۰ \Rightarrow m - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

جواب‌های حالت اول و دوم یکسان نیستند؛ درنتیجه ۳ جواب برای m وجود دارد.

۵ گزینه ۱

جعبه ابزار: تعیین علامت. خاصیت تغییر علامت یا عدم تغییر علامت ریشه‌ها در جدول تعیین علامت.

در مرحلهٔ نخست عبارت را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$\frac{(\sqrt{x} + ۴)(\sqrt{x} - ۲)(ax - ۱۲)}{(۲x + b)} \geq ۰$$

$$\sqrt{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

یکی از ریشه‌ها، ۴ است که باعث تغییر علامت نشده است. پس این ریشه مضاعف است و ریشهٔ عبارت $(ax - ۱۲)$ است، ازطرفی ۳ جزء مجموعه جواب نیست. باتوجه‌به اینکه نامعادله، علامت مساوی صفر نیز دارد پس ۳ باید ریشهٔ مخرج بوده باشد.

پس:

$$\left.\begin{array}{l} ax - ۱۲ \Rightarrow ۴a - ۱۲ = ۰ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲x + b \Rightarrow ۶ + b = ۰ \Rightarrow b = -۶ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a + b = ۲ \times ۳ - ۶ = ۰$$

چالش سؤال: تجزیهٔ عبارت $x + ۲\sqrt{x} - ۸$ به شکل صحیح - تشخیص ۳ به عنوان ریشهٔ مخرج - تشخیص ۴ به عنوان ریشهٔ مضاعف

۶

گزینه ۱

می‌دانیم که برای حل نامعادله باید تعیین علامت کنیم. پس:

$$(-۳x^۲+ax+b)(x+۱)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ -۳x^۲+ax+b=۰ \end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه مجموعهٔ جواب نامعادله به‌صورت بازهٔ $(-\infty\,,\,۴]$ و یکی از ریشه‌های نامعادله، -۱ است، باید نامعادله در $x=-۱$، ریشهٔ مضاعف داشته باشد و جدول تعیین علامت باید به‌صورت زیر باشد:

	-۱		۴	
$+$		$+$		$-$

یعنی ۴ و -۱ ریشه‌های $-۳x^۲+ax+b$ هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳(-۱)^۲+a(-۱)+b=۰ \Rightarrow -۳-a+b=۰ \Rightarrow b-a=۳ \\ -۳(۴)^۲+۴a+b=۰ \Rightarrow -۴۸+۴a+b=۰ \Rightarrow b+۴a=۴۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۹\,,\; b=۱۲ \Rightarrow a-b=-۳$$

۷

گزینه ۲

ریشهٔ مخرج در جدول تعیین علامت، تعریف نشده است، یعنی (-۲) ریشهٔ مخرج است:

$$(x+c)^۲=۰ \Rightarrow x=-c=-۲ \Rightarrow c=۲$$

$x^۲-b^۲$ دارای دو ریشهٔ قرینه است:

$$\Rightarrow x^۲-b^۲=۰ \Rightarrow x^۲=b^۲ \Rightarrow x=\pm b \Rightarrow b=\pm\sqrt{۲}$$

ریشهٔ دیگر $x=۱$ است که باید ریشهٔ صورت باشد:

$$۲x+a=۰ \Rightarrow ۲x=-a \Rightarrow x=\frac{-a}{۲}=۱ \Rightarrow a=-۲$$

$$ab^۲+c=(-۲)\underbrace{(\pm\sqrt{۲})^۲}_{۲}+۲=-۴+۲=-۲$$

۸

گزینه ۲

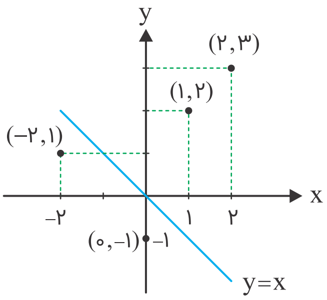
برای تابع بودن باتوجه‌به زوج‌های $(۱,۲)$ و $(۱,k^۲+k)$ باید داشته باشیم:

$$k^۲+k=۲ \Rightarrow k^۲+k-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (k+۲)(k-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=-۲ \\ k=۱ \end{cases}$$

اگر $k=۱ \leftarrow f=\{(۱,۲),(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۰,-۱)\} \leftarrow$ تابع نیست.

اگر $k=-۲ \leftarrow f=\{(۱,۲),(-۲,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۰,-۱)\} \leftarrow$ تابع است.



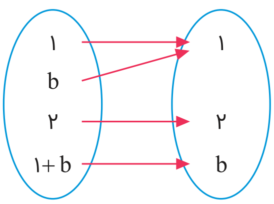
بنابراین دو نقطه از تابع f بالای نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم قرار دارند.

۹

گزینه ۳

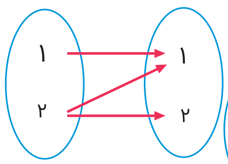
از a دو پیکان خارج شده است و اگر مولفهٔ دوم آن نابرابر باشد، این نمودار تابع نخواهد بود. برای رفع این مشکل، مولفه‌های دوم را یکسان قرار می‌دهیم: $a=۱$

پس نمودار به این ترتیب خواهد بود:

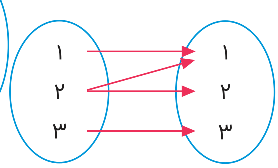


برای بررسی b، حالات مختلف برابری مولفه‌های اول را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

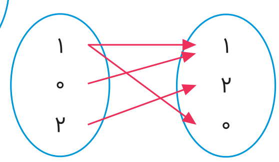
$b=۱$: تابع نیست.



$b=۲$: تابع نیست.



$b=۰$: تابع نیست.



۱۰

گزینه ۳

از عضو c دو پیکان خارج شده است و با حذف این عضو، رابطه به تابع تبدیل خواهد شد.

۱۱ گزینه ۱

دو خط موازی هستند پس شیب‌های آن‌ها برابر است، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + h \\ ۲y = ۳x - b \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - \frac{b}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{۳}{۲}$$

اگر $f(۲) = ۲a - ۱$ پس:

$$\frac{۳}{۲} \times ۲ + h = ۲a - ۱ \Rightarrow h = ۲a - ۴$$

و $f(۱ - a) = ۲$ یعنی:

$$\frac{۳}{۲} \times (۱ - a) + h = ۲ \Rightarrow ۳ - ۳a + ۲h = ۴$$

بنابراین اگر h را جاگذاری کنیم:

$$۳ - ۳a + ۲(۲a - ۴) = ۴ \Rightarrow ۳ - ۳a + ۴a - ۸ = ۴ \Rightarrow a = ۹$$

در نتیجه:

$$h = ۲a - ۴ = ۱۸ - ۴ = ۱۴$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۲}x + ۱۴ \Rightarrow f(-۶) = -۹ + ۱۴ = ۵$$

۱۲ گزینه ۲

نقطه (α , β) را در تابع صدق می‌دهیم:

$$\beta = (۱ - ۲m)\alpha - \frac{۲m + ۳}{۲} \Rightarrow ۲\beta = ۲(۱ - ۲m)\alpha - ۲m - ۳$$
$$\Rightarrow ۲\beta = ۲\alpha - ۴m\alpha - ۲m - ۳ \Rightarrow ۴m\alpha + ۲m = ۲\alpha - ۲\beta - ۳$$
$$\Rightarrow (۲\alpha + ۱)۲m = ۲\alpha - ۲\beta - ۳$$

برای این‌که m بی‌اثر باشد لازم است:

$$۲\alpha + ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۲}$$
$$۲\alpha - ۲\beta - ۳ = ۰ \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{۳}{۲}$$

۱۳ گزینه ۴

رابطهٔ داده‌شده در ابتدا باید تابع باشد، پس باتوجه‌به وجود زوج مرتب‌های $(-۱, m+۳)$ و $(-۱, m^۲-m)$، باید داشته باشیم:

$$m^۲ - m = m + ۳ \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۳ = (m-۳)(m+۱) = ۰$$
$$\Rightarrow m = -۱ \text{ یا } m = ۳$$

به ازای $m = ۳$ زوج مرتب‌های $(-۱, ۶)$ و $(-۱, ۱)$ در این رابطه قرار می‌گیرند که تابع نخواهد بود. پس $m = -۱$ قابل‌قبول است. در این صورت تابع f به‌صورت زیر است:

$$f = \left\{(۰, -۲), (-۱, ۲), (\frac{۱}{۳}, ۱)\right\}$$

دامنهٔ این تابع $D = \left\{۰, -۱, \frac{۱}{۳}\right\}$ و برد آن $R = \{-۲, ۱, ۲\}$ است که هیچ عضو مشترکی ندارند.

۱۴ گزینه ۲

برد تابع، مجموعه اعضا y یا خروجی‌های مجاز از تابع است. در این سوال باید ببینیم که تابع f نمی‌تواند چه خروجی دهد تا عدد a را بیابیم. عبارت $\frac{۱}{x-۱}$ را برابر a قرار می‌دهیم تا ببینیم که جواب x بر حسب a چگونه است:

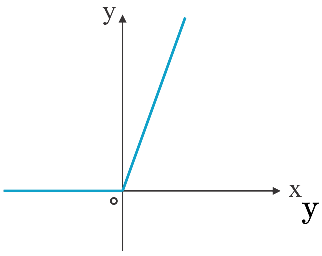
$$\frac{۱}{x-۱} = a \Rightarrow ۱ = ax - a \Rightarrow ۱ + a = ax \Rightarrow x = \frac{a+۱}{a}$$

اگر بخواهیم عبارت $\frac{a+۱}{a}$ معنی نداشته باشد باید $a = ۰$ تا مخرج صفر شود و x نتواند برابر این عبارت قرار گیرد، پس $a = ۰$ نمی‌تواند در برد $f(x)$ باشد و داریم: $f(۰) = -۱$

۱۵ گزینه ۲

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq ۰ \\ x - x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases}$$



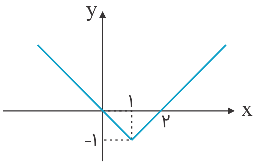
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

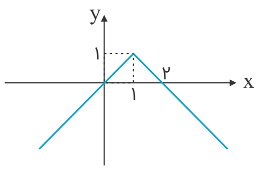
$$y = x - |x| = \begin{cases} x - x & ; x \geq ۰ \\ x + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۰ & ; x \geq ۰ \\ ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به‌صورت زیر می‌باشند:



گزینهٔ ۳



گزینهٔ ۴

۱۶ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه خط $y = -x$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است، بنابراین باید ضابطهٔ $f(x)$ را کوچک‌تر از $-x$ قرار دهیم داریم:

$$|x + a| + ۱ < -x \Rightarrow |x + a| < -x - ۱$$
$$\Rightarrow x + ۱ < x + a < -x - ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + a < -x - ۱ \Rightarrow ۲x < -۱ - a \Rightarrow x < \dfrac{-۱ - a}{۲} & (*) \\ x + ۱ < x + a \Rightarrow a > ۱ \quad (**) \end{cases}$$

باتوجه‌به صورت سؤال $x \in (-\infty\,,\,-۲)$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{-۱ - a}{۲} = -۲ \Rightarrow -۱ - a = -۴ \Rightarrow a = ۳$$
$$\Rightarrow f(x) = |x + ۳| + ۱$$
$$\Rightarrow f(-۲) = |(-۲) + ۳| + ۱ = ۲$$

۱۷

گزینه ۱

$f(x^۲+x)$ یعنی در ضابطهٔ $f(x)$، به‌جای x، $x^۲+x$ قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{۴x+۱}\Rightarrow f(x^۲+x)=\sqrt{۴(x^۲+x)+۱}\Rightarrow f(x^۲+x)=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که $۴x^۲+۴x+۱$ برابر $(۲x+۱)^۲$ است:

$$f(x^۲+x)=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

باتوجه‌به آنکه $x>۰$:

$$x>۰\Rightarrow ۲x>۰\Rightarrow ۲x+۱>۱$$

پس: $|۲x+۱|=۲x+۱$ و بنابراین:

$$f(x^۲+x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم: با قرار دادن $x=۱$ داریم:

$$x=۱\Rightarrow f(۲)=\sqrt{۹}=۳$$

پس گزینه‌ای درست است که با قرار دادن $x=۱$ برابر ۳ شود که فقط $۲x+۱$ این گونه است.

۱۸

گزینه ۴

$$|f(x)-۱|=۲x^۲-f(۱)$$
$$\xrightarrow{x=۱}|f(۱)-۱|=۲(۱)^۲-f(۱)\Rightarrow |f(۱)-۱|=۲-f(۱)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(۱)-۱=۲-f(۱)\Rightarrow ۲f(۱)=۳\Rightarrow f(۱)=\dfrac{۳}{۲}\\ f(۱)-۱=-۲+f(۱)\Rightarrow -۱=-۲\ \text{غقق}\end{cases}$$

پس داریم:

$$|f(x)-۱|=۲x^۲-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{x=۲}|f(۲)-۱|=۲(۲)^۲-\frac{۳}{۲}=۸-\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(۲)-۱=\dfrac{۱۳}{۲}\Rightarrow f(۲)=\dfrac{۱۵}{۲}\\ f(۲)-۱=-\dfrac{۱۳}{۲}\Rightarrow f(۲)=-\dfrac{۱۳}{۲}+۱=-\dfrac{۱۱}{۲}\end{cases}$$

۱۹

گزینه ۲

برای مشخص کردن سطح محصور، نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

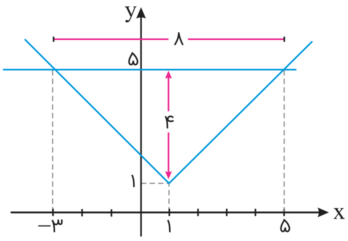
گام اول: مختصات نقطهٔ شکست تابع $f(x) = |x-۱| + ۱$ نقطهٔ $(۱, ۱)$ است.

گام دوم: ضابطهٔ توابع f و g را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد نمودار دو تابع به دست آید.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x-۱| + ۱ = ۵ \Rightarrow |x-۱| = ۴$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow x = \pm ۴ + ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۵ \end{cases}$$

به کمک اطلاعات به‌دست‌آمده، نمودار توابع را رسم کرده و سطح محصور را مشخص می‌کنیم.



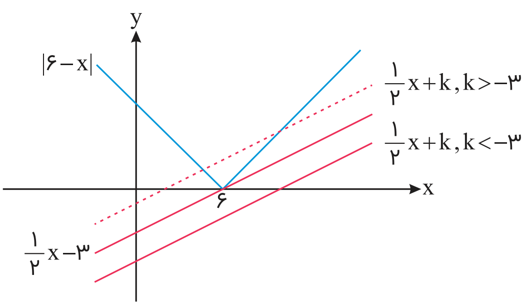
سطح محصور مثلثی به ارتفاع ۴ و قاعدهٔ ۸ است.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} \Rightarrow S = \frac{۴ \times ۸}{۲} = ۱۶$$

۲۰

گزینه ۳

نمودار توابع $y = |۶ - x|$ و $y = \frac{۱}{۲}x + k$ را رسم می‌کنیم.



اگر $k > -۳$ باشد، دو نمودار در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

اگر $k = -۳$ باشد، تنها نقطهٔ برخورد نقطه‌ای با طول ۶ است.

اگر $k < -۳$ باشد دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

پس معادلهٔ $|۶ - x| = \frac{۱}{۲}x + k$ فقط به ازای $k = -۳$ یک ریشه دارد.

۲۱

گزینه ۴

$$[x-۲]=۱ \Rightarrow ۱ \le x-۲ < ۲ \Rightarrow ۳ \le x < ۴$$

اگر $۳ \le x < ۴$ باشد، پس $x-۳ \ge ۰$ و $x-۴ < ۰$ خواهد بود.

$$f(x)=|\underbrace{x-۳}_{\text{مثبت}}|-|\underbrace{x-۴}_{\text{منفی}}|=x-۳+(x-۴)=۲x-۷$$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ۲x-۷=۲x^۲+x-۱۷ \Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۲} & \times \\ x=-۲ & \times \end{cases}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های به‌دست‌آمده در فاصلهٔ $۳ \le x < ۴$ نیستند؛ پس معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

۲۲

گزینه ۴

می‌دانیم:

$$x^۲+ax=\left(x+\frac{a}{۲}\right)^۲-\frac{a^۲}{۴}$$

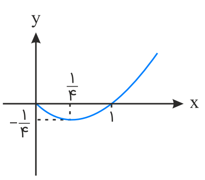
$$\Rightarrow x+a\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}$$

داریم:

$$y=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$$

می‌دانیم حداقل یک عبارت به‌صورت $(\ )^۲$ صفر است، پس حداقل تابع به‌صورت $y_{min}=۰-\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$ و $y \ge -\frac{۱}{۴}$ است؛ این اتفاق وقتی می‌افتد که:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\right)^۲=۰ \Rightarrow \sqrt{x}-\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$



۲۳ گزینه ۴

$$f(\frac{۹}{۴}) = [\frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۲}] - [-\frac{۹}{۴}] = [\frac{۱۵}{۴}] - [-\frac{۹}{۴}] = ۳ - (-۳) = ۶$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = [-\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}] - [+\frac{۱}{۲}] = [۱] - [\frac{۱}{۲}] = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\Rightarrow f(\frac{۹}{۴}) + f(-\frac{۱}{۲}) = ۶ + ۱ = ۷$$

۲۴ گزینه ۳

$$f(۲) = ۲|۲(۲)| = ۲ \times ۴ = ۸$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(۴x) = ۸ \Rightarrow f(۸) = ۴x$$
$$\Rightarrow ۴x = ۸|۲(۸)| \Rightarrow ۴x = ۸ \times ۱۶ \Rightarrow x = ۳۲$$

۲۵ گزینه ۲

$$x = [x] + \underbrace{p_x}_{۰\le \text{اعشار} < ۱} \Rightarrow f(x) = \underbrace{۲[x]}_{\text{زوج}} + p_x \Rightarrow f(x) = \text{عدد زوج} + \text{عدد اعشاری}$$

پس در دامنهٔ $f^{-۱}$، (عدد اعشاری + عدد زوج) قرار دارد؛ یعنی گزینهٔ (۲).

۲۶ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

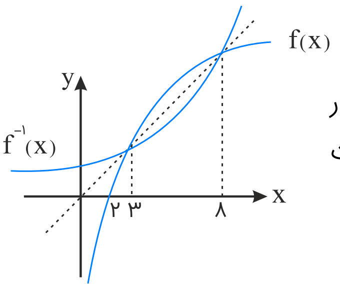
الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-۱}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

دامنهٔ تابع $\sqrt{x - f^{-۱}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-۱}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

$$x - f^{-۱}(x) \geq ۰ \Rightarrow x \geq f^{-۱}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینهٔ هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-۱}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.



در بازهٔ $[۳, ۸]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار $y = f^{-۱}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و درنتیجه $x - f^{-۱}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازهٔ $[۳, ۸]$ دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده است.

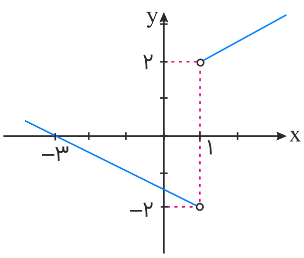
۲۷

گزینه ۱

برای آنکه پی ببریم نمودار تابع f در چه بازه‌ای زیر محور xها قرار دارد، نمودار f را رسم می‌کنیم، داریم:

$$f(x)=\frac{(x+۳)(x-۱)}{۲|x-۱|}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} & ;x>۱\\ \frac{-۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & ;x<۱\end{cases}$$

تابع f در محدودهٔ $-۳<x<۱$، زیر محور xها است و در این بازه، از ضابطهٔ $y=\frac{-۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ پیروی می‌کند. برد آن در این بازه $(-۲,۰)$ است که همان دامنهٔ $f^{-۱}$ می‌شود پس داریم: $D_{f^{-۱}}=R_f=(-۲,۰)$



حال ضابطه وارون را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$y=\frac{-۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲y=-x-۳\Rightarrow x=-۲y-۳\xrightarrow{\text{عوض کردن جای x و y}}y=-۲x-۳$$

پس ضابطهٔ وارون به صورت $f^{-۱}(x)=-۲x-۳,\ -۲<x<۰$ می‌باشد.

تذکر: برای تعیین بازه‌ای که تابع f زیر محور xها قرار دارد، می‌توانیم ضابطهٔ f را کوچک‌تر از صفر قرار دهیم و از حل نامعادلهٔ حاصل، بازه موردنظر را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{۲|x-۱|}<۰\Rightarrow -۳<x<۱$$

۲۸

گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{x-۴\sqrt{x-۴}}=\sqrt{(x-۴)-۴\sqrt{x-۴}+۴}=\sqrt{(\sqrt{x-۴}-۲)^۲}=\left|\sqrt{x-۴}-۲\right|$$

$$g(x)=\sqrt{x+۴\sqrt{x-۴}}=\sqrt{(x-۴)+۴\sqrt{x-۴}+۴}=\sqrt{(\sqrt{x-۴}+۲)^۲}=\left|\sqrt{x-۴}+۲\right|$$

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\left|\sqrt{x-۴}-۲\right|-\left|\sqrt{x-۴}+۲\right|$$

$$\xrightarrow{x\geq ۸}\sqrt{x-۴}-۲-\sqrt{x-۴}-۲=-۴$$

۲۹ گزینه ۳

اگر f ثابت باشد پس $f(x)=c$ بنابراین:

$$f(m)+f(n)=f(m).f(n)\Rightarrow c+c=c^۲\Rightarrow c^۲=۲c\Rightarrow c=۲\Rightarrow f(x)=۲$$

نیمساز ناحیه اول عبارت است از خط $y=x$ پس:

$$(۲n^۲-۷n+۱,\ -۲)\Rightarrow -۲=۲n^۲-۷n+۱\Rightarrow ۲n^۲-۷n+۳=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta=۴۹-۲۴=۲۵\\ n=\dfrac{۷\pm۵}{۴}\Rightarrow\begin{cases}n=۳\\ n=\dfrac{۱}{۲}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}\end{cases}$$

و بر روی نقطه دوم:

$$(m^۲-۴m+۶\,,\ ۳\times۲)\Rightarrow ۶=m^۲-۴m+۶\Rightarrow m(m-۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۰\quad \text{غ ق ق}\\ m=۴\end{cases}$$

بنابراین:

$$[\frac{mn}{۵}]=[\frac{۱۲}{۵}]=[۲/۴]=۲$$

۳۰ گزینه ۱

$$f=\{(-۱,۱),(۱,۰),(۰,۲),(-۲,۳)\}\Rightarrow f^۲=\{(-۱,۱),(۱,۰),(۰,۴),(-۲,۹)\}$$

$$(f^۲)^{-۱}=\{(۱,-۱),(۰,۱),(۴,۰),(۹,-۲)\}\Rightarrow (f^۲)^{-۱}-۱=\{(۱,-۲),(۰,۰),(۴,-۱),(۹,-۳)\}$$

$$f^{-۱}=\{(۱,-۱),(۰,۱),(۲,۰),(۳,-۲)\}\Rightarrow (f^{-۱})^۲=\{(۱,۱),(۰,۱),(۲,۰),(۳,۴)\}$$

$$(f^{-۱})^۲-۱=\{(۱,۰),(۰,۰),(۲,-۱),(۳,۳)\}$$

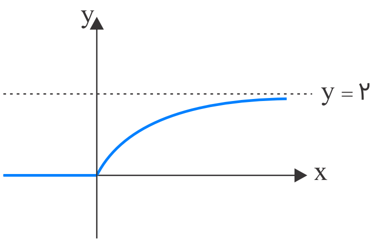
$$D_{\frac{(f^۲)^{-۱}-۱}{(f^{-۱})^۲-۱}}=\varnothing$$

دامنه تهی است، پس برد هم عضوی ندارد.

۳۱ گزینه ۲

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x+|x|}{|x+۱|+۱} = \begin{cases} ۰ & ; x \le ۰ \\ \frac{۲x}{x+۲} & ; x > ۰ \end{cases}$$

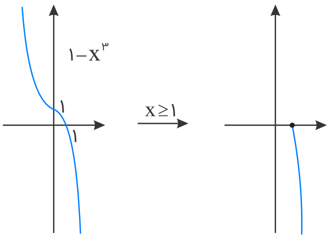
به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



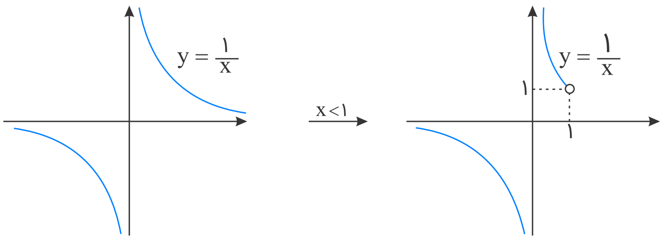
پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[۰, ۲)$ خواهد بود.

۳۲ گزینه ۴

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل، برد ضابطهٔ اول $(-\infty, ۰]$ است. پس برد ضابطهٔ دوم باید $(۰, +\infty)$ باشد.

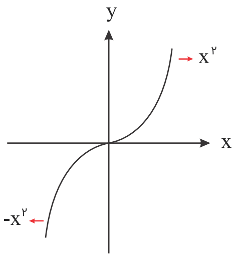


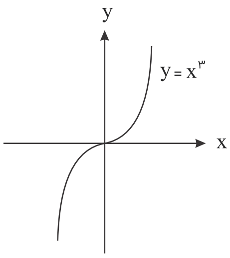
برد ضابطهٔ دوم شامل اعداد منفی است که برای ما مهم نیست. به علاوه می‌دانیم اگر $۰ < x < ۱$ باشد، $\frac{۱}{x} > ۱$ است و $\frac{۱}{x} + a > ۱ + a$ می‌شود. یعنی فاصلهٔ $(۱+a, +\infty)$ در برد این تابع قرار می‌گیرد. برای اینکه برد تابع $\mathbb{R}$ شود، ما نیاز داریم که $(۰, +\infty)$ در برد ضابطهٔ دوم قرار بگیرد، پس باید:

$$۱ + a \le ۰ \Rightarrow a \le -۱$$

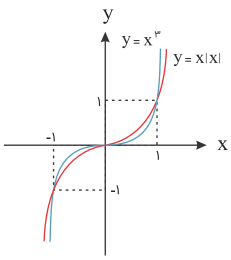
۳۳ گزینه ۳

$$y = x|x| = \begin{cases} x^{۲} & ; x \geq ۰ \\ -x^{۲} & ; x < ۰ \end{cases}$$





حالا دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



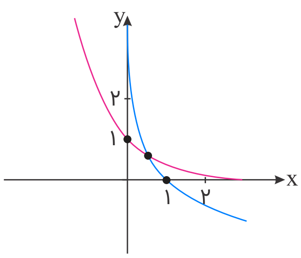
با روش جبری نیز می‌توانیم مسئله را حل کنیم:

$$x^{۳} = x|x| \Rightarrow x^{۲} = |x| \Rightarrow x = \pm ۱ \ , \ x = ۰$$

بنابراین دو تابع در سه نقطه به طول‌های ۰ و ±۱ با هم برخورد می‌کنند.

۳۴ گزینه ۳

اول: اگر تابع نمایی $y = a^x$ وارون خود را قطع کند آنگاه $۰ < a < ۱$ است. ضابطهٔ وارون این تابع $y = \log_a^x$ می‌باشد.



دوم: مطابق شکل هر دو تابع $y = a^x$ و $y = \log_a^x$ $(۰ < a < ۱)$ نزولی هستند و طول و عرض نقطهٔ برخورد در بازهٔ $(۰, ۱)$ قرار دارد.

این تابع وارون خودش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند.

۳۵

گزینه ۱

تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog = \{(۲,۱),(۱,[a]^{۲})\}$$

شرط صعودی بودن fog این است که $fog(۱) \leq fog(۲)$ باشد.

$$[a]^{۲} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq [a] \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq a < ۲$$

۳۶

گزینه ۲

اعداد صحیح ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ عضو دامنهٔ g هستند. پس:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|g(x) \in D_f\,\}$$
$$D_f = (-\infty, ۰) \cup [۴, +\infty)$$
$$g(-۲) = ۰ \xrightarrow{۰ \notin D_f} -۲ \notin D_{fog}$$
$$g(-۱), g(۰) < ۰ \xrightarrow{(-\infty,۰) \in D_f} -۱, ۰ \in D_{fog}$$
$$g(۱) = ۰ \xrightarrow{۰ \notin D_f} ۱ \notin D_{fog}$$
$$۰ < g(۲) < ۴ \xrightarrow{(۰,۴) \notin D_f} ۲ \notin D_{fog}$$
$$g(۳) = ۴ \xrightarrow{۴ \in D_f} ۳ \in D_{fog}$$

پس اعداد صحیح ۰، -۱ و ۳ عضو دامنهٔ تابع fog هستند.

۳۷

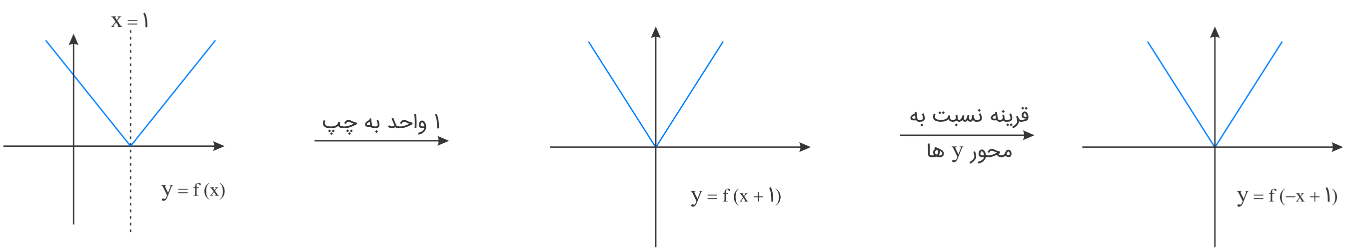
گزینه ۳

برای رسم تابع $f(۱-x)$ باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) ابتدا در تابع $y = f(x)$ به جای x قرار دهیم $x+۱$، یعنی تابع f را ۱ واحد به سمت چپ ببریم تا تابع $y = f(x+۱)$ ایجاد شود.

۲) در تابع مرحلهٔ قبل به جای x قرار دهیم $-x$ تا تابع $y = f(-x+۱)$ ایجاد شود؛ یعنی تابع $y = f(x+۱)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

حال اگر تابع قسمت ۱ و ۲ یکسان باشند، این یعنی تابع f، تابعی است که اگر ۱ واحد آن را به سمت چپ ببریم با تابعی که اگر ۱ واحد به سمت چپ ببریم و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم تفاوتی ندارد. پس $x = ۱$ باید محور تقارن این تابع باشد. به شکل زیر دقت کنید:



۳۸ گزینه ۱

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x = y \Rightarrow x = (\tfrac{1}{2})^{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=(\tfrac{1}{2})^{x} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

$$f^{-1}(2x+1)-f^{-1}(x-1)\geq 0 \Rightarrow f^{-1}(2x+1)\geq f^{-1}(x-1)$$
$$\Rightarrow x-1\geq 2x+1 \Rightarrow x\leq -2$$

۳۹ گزینه ۱

برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x-2}\geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{x-2}\leq 0 \xrightarrow{+1} 1-\sqrt{x-2}\leq 1 \Rightarrow R_f=(-\infty,1]$$

ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=1-\sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{x-2}=1-y \xrightarrow{\text{توان}2} x-2=1-2y+y^2$$
$$\Rightarrow x=y^2-2y+3 \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ با } y} y=x^2-2x+3$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-2x+3 \quad ; D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,1]$$

برای به دست آوردن ضابطهٔ $f^{-1}(-x)$، در ضابطهٔ $f^{-1}(x)$، به جای x، $-x$ می‌گذاریم:

$$f^{-1}(-x)=x^2+2x+3$$

دامنهٔ آن هم دقیقاً قرینهٔ دامنهٔ $f^{-1}(x)$، است:

$$D_{f^{-1}(-x)}=[-1,+\infty)$$

پس:

$$D_g=D_{f^{-1}(x)}\cap D_{f^{-1}(-x)}=[-1,1]$$

ضابطهٔ g را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=f^{-1}(x)-f^{-1}(-x)=\left(x^2-2x+3\right)-\left(x^2+2x+3\right)=-4x$$

برد g را حساب می‌کنیم:

$$-1\leq x\leq 1 \Rightarrow -4\leq -4x\leq 4 \Rightarrow R_g=[-4,4]$$

این بازه، شامل ۹ عدد صحیح است.

۴۰ گزینه ۱

$$f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱ + ۱ = (x - ۱)^{۳} + ۱$$

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس با قرینه کردن آن نسبت به خط $y = x$، نمودار وارون آن را پیدا می‌کنیم: