ریاضی

۱ گزینه ۳

عبارت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ را به اختصار به‌صورت $f(a^+)$ بیان می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(-2f(x^2+1)) - \lim_{x\to 1^-} f(f(1-x^2)) = f(-2f(2^+)) - f(f(0^+))$$
$$= f(-2(0^-)) - f(2) = f(0^+) - f(2) = 2-1 = 1$$

۲ گزینه ۴

حد تابع در تمام نقاط بازهٔ $(-3,3)$ (حتی نقاط صحیح این بازه) با ضابطهٔ $y=3x^2$ محاسبه می‌شود (زیرا اگر $x\to n$ و $n\in\mathbb{Z}$ آنگاه x بر n منطبق نمی‌گردد و در همسایگی محذوف نقطهٔ $x=n$ قرار می‌گیرد)؛ بنابراین در تمام نقاط بازهٔ $(-3,3)$ ازجمله نقاط صحیح این بازه حد دارد؛ به‌عبارت‌دیگر نقطه‌ای در بازهٔ $(-3,3)$ وجود ندارد که تابع f در آن فاقد حد باشد.

$$n\in\mathbb{Z}: \lim_{x\to n} f(x) = \lim_{x\to n} 3x^2 = 3n^2$$

۳ گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x\to 0^-$ عبارت x^3-x به سمت 0^+ میل می‌کند یا 0^-. برای این کار از تغییر متغیر $x^3-x=t$ استفاده می‌کنیم. با تعیین محدودهٔ t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه‌های داده‌شده به دست می‌آوریم.

$$x\to 0^- \Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow x^3>x \Rightarrow x^3-x>0 \xrightarrow{x^3-x=t} t>0 \Rightarrow t\to 0^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ یا همان $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t\to 0^+ \Rightarrow t>0 \Rightarrow f(t)=\sqrt{1-t}$$
$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+}\sqrt{1-t} = \sqrt{1-0} = 1$$

۴ گزینه ۴

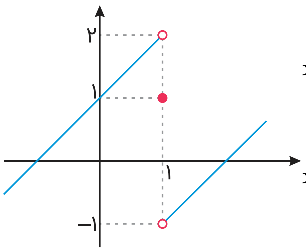
$$\lim_{x\to a}(f(x)+\sqrt{f(x)})=۱۲\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)+\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}=۱۲$$
$$\Rightarrow L+\sqrt{L}-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow(\sqrt{L}+۴)(\sqrt{L}-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{L}=-۴ & \text{ریشه حقیقی ندارد}\\ \sqrt{L}=۳\Rightarrow L=۹\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{۱+f(x)}{۴-f(x)}=\frac{۱+L}{۴-L}=\frac{۱+۹}{۴-۹}=\frac{۱۰}{-۵}=-۲$$

۵ گزینه ۳

اگر تابع $y=\frac{a[x]+x}{f(x)-۳}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، باید مقادیر حد چپ و راست آن در $x=۱$ برابر باشند.



$$\lim_{x\to ۱^+}y=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a[x]+x}{f(x)-۳}=\frac{a(۱)+۱}{-۱-۳}=\frac{a+۱}{-۴}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}y=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a[x]+x}{f(x)-۳}=\frac{a(۰)+۱}{۲-۳}=\frac{۱}{-۱}$$

$$\frac{a+۱}{-۴}=-۱\Rightarrow a+۱=۴\Rightarrow a=۳$$

۶ گزینه ۲

می‌دانیم اگر $f(x)=\frac{-۲}{x}$ باشد، آنگاه $f(\frac{۲}{۳})=\frac{-۲}{\frac{۲}{۳}}=-۳$ می‌شود. سؤال اینجاست که اگر $x\to(\frac{۲}{۳})^-$ آنگاه حاصل $\frac{-۲}{x}$ از ۳- بیشتر می‌شود و یا کمتر؟

$$x\to(\frac{۲}{۳})^-\Rightarrow x<\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{x}>\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{-۲}{x}<-۳$$

بنابراین چون $\frac{-۲}{x}<-۳$، پس $\frac{-۲}{x}\to(-۳)^-$:

$$\lim_{x\to(\frac{۲}{۳})^-}[\frac{-۲}{x}]=[\frac{-۲}{(\frac{۲}{۳})^-}]=[(-۳)^-]=-۴$$

۷

گزینه ۲

اول:

$$x \to ۱^- \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{x}) \to ۱^+$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} [\frac{۱}{x}] = [۱^+] = ۱$$

دوم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} < ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{x}) \to ۱^-$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} [\frac{۱}{x}] = [۱^-] = ۰$$
$$\Rightarrow ۱ + ۰ = ۱$$

۸

گزینه ۳

اول: مقدار $\cos ۰$ برابر ۱ است. در همسایگی نقطهٔ صفر، مقدار $\cos$ کمتر از ۱ است. یعنی:

$$\cos x < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\cos x} > ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{\cos x} > ۳ \Rightarrow (\frac{۳}{\cos x}) \to ۳^+$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} [\frac{۳}{\cos x}] = [۳^+] = ۳$$

دوم: حد $\lim_{x\to ۰} [۳\sin x]$ وجود ندارد. زیرا حد راست و چپ آن در صفر برابر نیست.

$$\lim_{x\to ۰^+} [۳\sin x] = [۳ \times ۰^+] = [۰^+] = ۰$$
$$\lim_{x\to ۰^-} [۳\sin x] = [۳ \times ۰^-] = [۰^-] = -۱$$

۹

گزینه ۴

اولاً $x = \frac{\pi}{۲}$ در دامنهٔ تابع نیست، پس مخرج در $x = \frac{\pi}{۲}$ برابر صفر است.

$$y = \frac{b\cos^۲ x}{a - ۲\sin x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۲}\ \text{مخرج را صفر می‌کند}} a = ۲ \Rightarrow y = \frac{b(۱-\sin^۲ x)}{۲ - ۲\sin x}$$
$$= \frac{b(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۲(۱-\sin x)} = \frac{b(۱+\sin x)}{۲}$$

ازطرفی حد تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$ برابر ۱ است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{b(۱+\sin x)}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{b(۱+۱)}{۲} = ۱ \Rightarrow b = ۱$$

$$a + b = ۲ + ۱ = ۳$$

۱۰ گزینه ۲

به ازای $x=-1$ مقدار مخرج برابر صفر است، پس به شرطی حد تابع $f(x)$ موجود است و مقدار آن برابر صفر نیست که عامل $(x+1)^2$ در صورت نیز وجود داشته باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned}&2x^3+ax+b=(x+1)^2(2x+\alpha)=\left(x^2+2x+1\right)(2x+\alpha)\\&=2x^3+4x^2+2x+\alpha x^2+2\alpha x+\alpha=2x^3+(4+\alpha)x^2+(2+2\alpha)x+\alpha\end{aligned}$$

باتوجه‌به این که ضریب x^2 باید صفر باشد، پس داریم:

$$4+\alpha=0\Rightarrow\alpha=-4$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(x+1)^2(2x-4)=\left(x^2+2x+1\right)(2x-4)\\&=2x^3-6x-4=2x^3+ax+b\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=-4\end{cases}\end{aligned}$$

$$a-b=-6-(-4)=-2$$

۱۱ گزینه ۱

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[۴\cos^۲\pi x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a+b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \to \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos\pi x < \cos\frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیهٔ اول مثلثاتی با افزایش مقدار x، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos\pi x$ از مقدار $\cos\frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos\pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^۲\pi x < \frac{۳}{۴} \overset{\times ۴}{\Rightarrow}$$
$$۴\cos^۲\pi x < ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲\pi x \to ۳^- \Rightarrow [۴\cos^۲\pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۲}$ است، اگر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ داده شده پس باید وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+} ax+b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶}+b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (I)$$

با فرض $a=-۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+} \frac{۲-۱۲x}{ax+b} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+} \frac{۲-۱۲x}{-۶bx+b}$$
$$= \lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱-۶x)}{b(-۶x+۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴$$

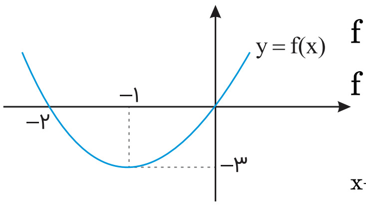
$$\overset{(I)}{\Rightarrow} a = -۶b = -۶\times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a+b$ برابر است با:

$$a+b = -۲۴+۴ = -۲۰$$

۱۲ گزینه ۳

حاصل حد $\lim\limits_{x\to(-۲)} \frac{f(x)}{x^۲-۴}$ در صورتی موجود است که $x=-۲$ ریشهٔ صورت هم باشد؛ پس معادلهٔ سهمی را می‌توانیم بنویسیم:



$$f(x)=ax(x+۲) \xrightarrow{(-۱,-۳)} -۳=a(-۱)(۱) \Rightarrow a=۳$$

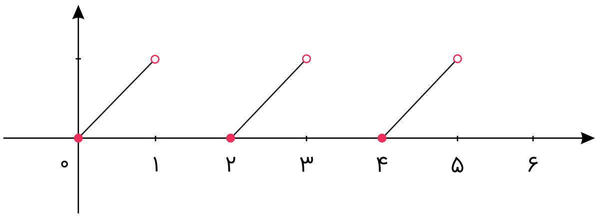
$$f(x)=۳x(x+۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)} \frac{f(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to(-۲)} \frac{۳x(x+۲)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to(-۲)} \frac{۳x(x+۲)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)} \frac{۳x}{x-۲}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

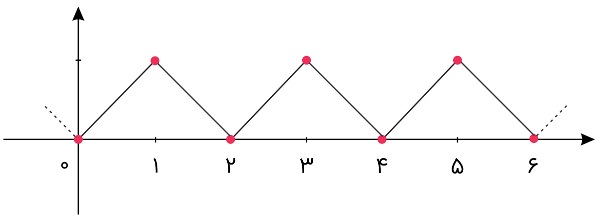
۱۳ گزینه ۱

بخشی از نمودار تابع $x-[x]$ وقتی که $[x]$ زوج باشد، به صورت زیر است:



$$y=|x-[x]| \qquad , \qquad [x]=۲k$$

تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & ;\ [x]\ \text{زوج}\\ |x-a-[x-a]+a| & ;\ [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. اگر a مثبت باشد، شکل بالا را a واحد به سمت بالا و راست منتقل می‌کنیم، پس پیوسته نمی‌شود. اما اگر $a<۰$ باشد، با انتقال، نمودار به‌صورت زیر پیوسته می‌شود:



برای پیوستگی در $\mathbb{R}$ لازم است ضابطهٔ دوم یعنی $|x-[x-a]|$ به شکل زیر شود؛ یعنی شیب آن منفی شود و a زوج منفی باشد که امکان‌پذیر نیست پس a وجود ندارد.

۱۴ گزینه ۳

توابع مربوط به ضابطه‌های داده‌شده در دامنه‌شان پیوسته هستند، بنابراین بایستی پیوستگی تابع f را در نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} a\sin x+b=a\sin(\frac{\pi}{۲})+b=a+b$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \cos x-b=۰-b=-b$$

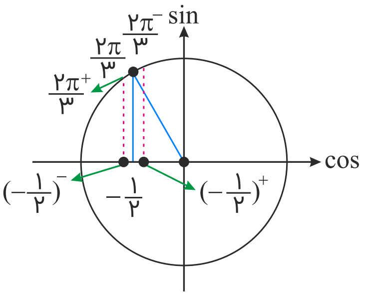
$$f(\frac{\pi}{۲})=۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-b=۲\Rightarrow b=-۲\\ a+b=۲\Rightarrow a-۲=۲\Rightarrow a=۴\end{cases}$$

۱۵ گزینه ۲

روش اول:

حد راست و چپ و مقدار تابع $f(x) = [\underbrace{\frac{۴}{x}}_{\substack{\downarrow \\ \text{نزولی}}}] + [۲\cos \pi x]$ را در $x = \frac{۲}{۳}$ حساب می‌کنیم. داریم:



حد راست : $[\frac{۴}{(\frac{۲}{۳})^+}] + [۲\cos(\frac{۲\pi}{۳})^+] = [۶^-] + [\underbrace{۲(\frac{-۱}{۲})^-}_{(-۱)^-}] = ۵ + (-۲) = ۳$

حد چپ : $[\frac{۴}{(\frac{۲}{۳})^-}] + [۲\cos(\frac{۲\pi}{۳})^-] = [۶^+] + [\underbrace{۲(\frac{-۱}{۲})^+}_{(-۱)^+}] = ۶ + (-۱) = ۵$

مقدار : $[\frac{۴}{\frac{۲}{۳}}] + [۲\cos\frac{۲\pi}{۳}] = [۶] + [\underbrace{۲(\frac{-۱}{۲})}_{-۱}] = ۶ + (-۱) = ۵$

چون فقط حد چپ با مقدار تابع برابر شده است، پس f در $x = \frac{۲}{۳}$، فقط پیوستگی چپ دارد.

روش دوم: چون هر دو عبارت داخل جزء صحیح‌ها، در نقطهٔ $x = \frac{۲}{۳}$ نزولی هستند، پس هر دو تابع جزء صحیح در این نقطه، از چپ پیوسته می‌باشند. بنابراین مجموع آن‌ها نیز در این نقطه دارای پیوستگی چپ است.

۱۶

گزینه ۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ $x = 2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \times \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{2x}} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x - 2)}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{-2}{2 + 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = 2$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۷

گزینه ۱

a باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. ازطرفی ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m+۳)^۲ - ۴(۶)(\frac{m}{۲}) = m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۲m = m^۲ - ۶m + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

$$x = a = \frac{-(m+۳)}{۲ \times ۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳ + \frac{۱}{۴}|} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳ + \frac{۱}{۸}|}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}\cancel{|x+\frac{۱}{۲}|}}{۲\cancel{|x+\frac{۱}{۲}|}|x^۲ + \frac{۱}{۴} - \frac{x}{۲}|} = \frac{\sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲}\tan b = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$$

۱۸

گزینه ۱

برای اینکه تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید مخرج کسر فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$x^۲ - ۲mx + ۲ - m = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴(۲-m) < ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۸ + ۴m < ۰ \Rightarrow m^۲ + m - ۲ < ۰ \Rightarrow (m+۲)(m-۱) < ۰$$

$$\text{تعیین علامت} \Rightarrow -۲ < m < ۱$$

۱۹ گزینه ۲

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازهٔ $[۲, ۲ + k)$ حاصل عبارت جبری $x^۲ - ۳$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطهٔ شروع بازه درصورتی‌که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود.)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^۲ - ۳] = [x^۲] - ۳$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^۲]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = ۲$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $۲ + k$ قرار داده و درنهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{۵}$ ناپیوسته می‌شود. $۲ + k$ را برابر $\sqrt{۵}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$۲ + k = \sqrt{۵} \Rightarrow k = \sqrt{۵} - ۲$$

۲۰ گزینه ۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴ \\ ۱ + \sqrt[۳]{x + ۱} \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۲ \\ x + ۵ \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-۴, +\infty) - \{-۲\}$$

بنابراین تنها در $x = -۲$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۱ نقطه است.

۲۱ گزینه ۴

طبق سؤال $f\,(x)$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$f\,(-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow f\,(-۱) = -۱ + ۲(-۱)^۲ - m + ۲m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = -۵$$

همچنین با تقسیم $f\,(x)$ بر $x + ۱$ داریم:

$$f\,(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶ = (x + ۱)\,(x^۲ + x - ۶)$$

صفرهای دیگر تابع را به دست می‌آوریم:

$$(x^۲ + x - ۶) = (x + ۳)\,(x - ۲) \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۲ \end{cases} \Rightarrow -۳ \times ۲ = -۶$$

۲۲ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲-۱$ برابر صفر است.

$$x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=۱\,,-۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱)=۰\,,p(-۱)=۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲)=p(۲-۱)+p(۱-۲)=p(۱)+p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲)=۰+۰=۰$$

۲۳ گزینه ۳

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P\,(x)$ بر $x-۱$ برابر با ۶ است، پس داریم: $P\,(۱)=۶$

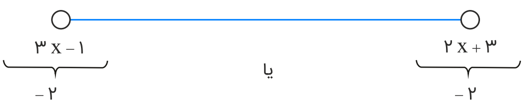
باقی‌ماندهٔ تقسیم $P\,(x)$ بر $x+۳$ برابر با ۲ است، پس داریم: $P\,(-۳)=۲$

برای به دست آوردن باقی ماندهٔ تقسیم $P\,(x-۵)+xP\,(x-۱)$ بر $x-۲$، باید $x=۲$ را در $P\,(x-۵)+xP\,(x-۱)$ قرار دهیم. داریم:

$$\text{باقی مانده} = P\,(-۳)+۲P\,(۱)=۲+۲(۶)=۱۴$$

۲۴ گزینه ۲

برای آنکه بازهٔ داده‌شده، یک همسایگی عدد -۲ نباشد، باید عدد -۲ در داخل این بازه قرار نگیرد، یعنی:



$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱\geq -۲ \Rightarrow ۳x\geq -۱ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۳} \\ ۲x+۳\leq -۲ \Rightarrow ۲x\leq -۵ \Rightarrow x\leq -\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} (-\infty,-\frac{۵}{۲}]\cup[-\frac{۱}{۳},+\infty) \qquad (۱)$$

توجه کنید که در هر بازه باید عدد سمت راست بزرگ‌تر از عدد سمت چپ باشد؛ بنابراین:

$$۳x-۱<۲x+۳ \Rightarrow x<۴ \qquad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲)=(-\infty,-\frac{۵}{۲}]\cup[-\frac{۱}{۳},۴)$$

۲۵ گزینه ۴

همسایگی راست عدد ۲ به‌صورت $(۲, m)$ می‌باشد $(m > ۲)$؛ بنابراین:

$$۱)\ a - ۲b = ۲ \Rightarrow a = ۲b + ۲ \qquad (۱)$$

$$۲)\ ۲a + b > ۲ \xrightarrow{(۱)} ۲\,(۲b + ۲) + b > ۲$$

$$\Rightarrow ۴b + ۴ + b > ۲ \Rightarrow ۵b > -۲ \Rightarrow b > -\frac{۲}{۵}$$

فقط بازهٔ داده‌شده در گزینهٔ (۴) در شرط $b > -\frac{۲}{۵}$ صدق می‌کند.

۲۶ گزینه ۱

$$\sqrt{\frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{۴}} \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{۴} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۴ - x^۲}{۴x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲\,,\ x \neq ۰$$

مجموعه مقادیر x : $x \in (-۲, ۲) - \{۰\}$

بازهٔ بالا یک همسایگی محذوف $x = ۰$ است.

۲۷ گزینه ۳

راه‌حل اول: چون حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود، کافی است صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و عامل ابهام را از صورت و مخرج حذف کنیم. یعنی داریم:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x + 10 & \underline{x+2} \\
\underline{-x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 5 \\
-2x^2 + x + 10 & \\
\underline{2x^2 + 4x} & \\
5x + 10 & \\
\underline{-5x - 10} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 10 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 5\right)$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 - 12x - 4 & \underline{x+2} \\
\underline{-x^3 - 2x^2} & x^2 - 5x - 2 \\
-5x^2 - 12x - 4 & \\
\underline{5x^2 + 10x} & \\
-2x - 4 & \\
\underline{2x + 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 12x - 4 = \left(x^2 - 5x - 2\right)(x+2)$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + x + 10}{x^3 - 3x^2 - 12x - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(x^2 - 2x + 5\right)}{(x+2)\left(x^2 - 5x - 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 5x - 2} = \frac{4 + 4 + 5}{4 + 10 - 2} = \frac{13}{12}$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

می‌توانیم برای محاسبهٔ حاصل حد و به‌منظور رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم. یعنی کافی است از صورت و مخرج جداگانه مشتق بگیریم و حاصل حد کسر جدید را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + x + 10}{x^3 - 3x^2 - 12x - 4} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 6x - 12} = \frac{3(4) + 1}{3(4) - 6(-2) - 12} = \frac{13}{12}$$

گزینه ۱

روش اوّل:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۴-۳x-۱}{۲x^۳-۲}=\frac{۴-۳-۱}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$

$$\begin{array}{l|l}
۴x^۴-۳x-۱ & x-۱ \\ \cline{2-2}
-(۴x^۴-۴x^۳) & ۴x^۳+۴x^۲+۴x+۱ \\ \hline
۴x^۳-۳x-۱ & \\
-(۴x^۳-۴x^۲) & \\ \hline
۴x^۲-۳x-۱ & \\
-(۴x^۲-۴x) & \\ \hline
x-۱ & \\
-(x-۱) & \\ \hline
۰ &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۴-۳x-۱}{۲(x^۳-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(۴x^۳+۴x^۲+۴x+۱)}{۲\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}=\frac{۴+۴+۴+۱}{۲(۱+۱+۱)}=\frac{۱۳}{۶}$$

روش دوم:

نکته: روش سریع تقسیم عبارت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\ldots+d$ بر عبارت $(x-m)$ به‌صورت زیر است (روش هورنر):

$$x-m=۰\Rightarrow x=m$$

m	a	b	c	.....	d
	a	$\underbrace{am+b}_{p}$	$\underbrace{am+c}_{q}$		r

مقسوم‌علیه $=ax^{n-۱}+px^{n-۲}+qx^{n-۳}+\ldots$ باقی‌مانده $=r$

بنابراین تقسیم عبارت $۴x^۴+۰\times x^۳+۰\times x^۲-۳x-۱$ بر $x-۱$ به‌صورت زیر است:

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

۱	۴	۰	۰	-۳	-۱
	۴	۴×۱+۰=۴	۴×۱+۰=۴	۴×۱+(-۳)=۱	۱×۱+(-۱)=۰

مقسوم‌علیه $=۴x^۳+۴x^۲+۴x+۱$ باقی‌مانده $=۰$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۴-۳x-۱}{۲(x^۳-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(۴x^۳+۴x^۲+۴x+۱)}{۲\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}=\frac{۱۳}{۶}$$

۲۹

گزینه ۲

گام اول

الف) وقتی $x \to ۰$ نتیجه می‌گیریم $x \notin \mathbb{Z}$، بنابراین $۲x$ هم یک عدد غیر صحیح است. اگر $۲x$ یک عدد غیر صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت $[۲x] + [-۲x] = -۱$.

ب) وقتی $x \to ۰$، حاصل حد عبارت $\frac{۱ - \cos^۳ x}{۱ - \sqrt{۱ + x^۲}}$ برابر $\frac{۰}{۰}$ بوده و مبهم است.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۰} (-۱) \times \frac{۱ - \cos^۳ x}{۱ - \sqrt{۱ + x^۲}} = \lim_{x\to ۰} (-۱) \times \frac{(۱ - \cos x)(۱ + \cos^۲ x + \cos x)}{۱ - \sqrt{۱ + x^۲}} \times \frac{۱ + \sqrt{۱ + x^۲}}{۱ + \sqrt{۱ + x^۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۰} (-۱) \times \frac{(۱ - \cos x)(۳)(۲)}{۱ - (۱ + x^۲)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۶(۱ - \cos x)}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۶(۲\sin^۲ \frac{x}{۲})}{x^۲}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۶(۲\sin^۲ \frac{x}{۲})}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱۲\cancel{\sin \frac{x}{۲}} \times \cancel{\sin \frac{x}{۲}}}{۴ \times \cancel{\frac{x}{۲}} \times \cancel{\frac{x}{۲}}} = ۳$$

نکته:

$$۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲ \alpha$$

$$\lim_{\alpha\to ۰} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = ۱$$

راه دوم: با استفاده از هوپیتال به رفع ابهام کسر می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to ۰} (-۱) \times \frac{۱ - \cos^۳ x}{۱ - \sqrt{۱ + x^۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cos^۳ x - ۱}{۱ - \sqrt{۱ + x^۲}} = \frac{۰}{۰}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{-۳\cos^۲ x(\sin x)}{-\frac{۲x}{۲\sqrt{۱ + x^۲}}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۳\cos^۲ x(\sin x)\sqrt{۱ + x^۲}}{x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to ۰} ۳\cos^۲ x(\sqrt{۱ + x^۲}) = ۱ \times ۳ = ۳$$

۳۰ گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}=\frac{۱-۱}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}=\text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}\times\frac{\sqrt[۳]{(۱-۲x)^۲}+(\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x})+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}{\sqrt[۳]{(۱-۲x)^۲}+(\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x})+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}\times\frac{\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}}{\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{((۱-۲x)-(۱-x))\left(\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x}\right)}{((۱-x)-(۱-۲x))\left(\sqrt[۳]{(۱-۲x)^۲}+\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cancel{x}(\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱-۲x})}{\cancel{x}(\sqrt[۳]{(۱-۲x)^۲}+\sqrt[۳]{۱-۲x}\times\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲})}$$

$$=\frac{-(۱+۱)}{۱+۱+۱}=\frac{-۲}{۳}$$

روش دوم:

نکته: وقتی $x\to ۰$ میل کند، آنگاه حد عبارت $\sqrt[n]{۱\pm x}$ با حد عبارت $(۱\pm\frac{x}{n})$ برابر است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-x}}{\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱-۲x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\frac{۲x}{۳})-(۱-\frac{x}{۳})}{(۱-\frac{x}{۲})-(۱-\frac{۲x}{۲})}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۲x}{۳}+\frac{x}{۳}}{-\frac{x}{۲}+x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x}{۳}}{\frac{x}{۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

۳۱ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^-}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^-}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^+}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{۴\pi}{۳}^\pm}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱+۲(-\frac{۱}{۲})^\pm}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^\pm}=\pm\infty$$

۳۲ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار درمی‌یابیم که $x = k$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است. ازطرفی ریشهٔ مضاعف $ax^۲ + bx + c$ برابر $x = -\dfrac{b}{۲a}$ می‌باشد. درنتیجه:

$$x = k = -\frac{(-۲a)}{۲} \Rightarrow x = k = a$$

$$x^۲ - ۲ax + ۲a + ۳ = ۰ \xrightarrow{x=a} a^۲ - ۲a^۲ + ۲a + ۳ = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x-۱}{x^۲+۲x+۱} = \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x-۱}{(x+۱)^۲} = \dfrac{-۲}{۰^+} = -\infty \quad \text{غ.ق.ق} \\ a = ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x+۳}{x^۲-۶x+۹} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x+۳}{(x-۳)^۲} = \dfrac{۶}{۰^+} = +\infty \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تنها مقدار قابل‌قبول برای a، برابر ۳ است.

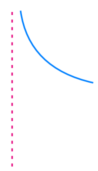
۳۳ گزینه ۱

به ازای $x = -۱$، صورت کسر عبارت زیر رادیکال برابر ۲- است و مخرج کسر عبارت زیر رادیکال برابر $f(۱)$ خواهد بود. چون $f(۱) = ۰$ است، پس باید از سمتی به $x = -۱$ نزدیک شویم که حاصل $f(-x)$، مقدار ۰^- به خود بگیرد که عبارت زیر رادیکال مثبت شود. اگر از سمت راست به ۱- نزدیک شویم، ورودی تابع $f(-x)$، برابر ۱^- است که مقدار تابع برابر ۰^- خواهد بود. پس تنها همسایگی راست $x = -۱$ عضو دامنهٔ تعریف تابع g بوده و داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} g(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} \sqrt{\frac{۳x+۱}{f(-x)}} = \sqrt{\frac{۳(-۱)+۱}{f(-(-۱^+))}}$$

$$= \sqrt{\frac{-۳+۱}{f(۱^-)}} = \sqrt{\frac{-۲}{۰^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

پس نمودار تابع $g(x)$ در اطراف $x = -۱$ به‌صورت زیر است. داریم:



x = -۱

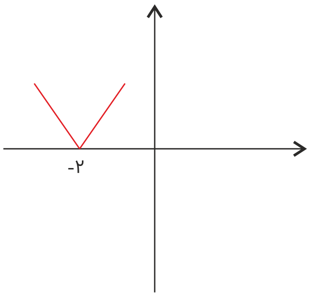
۳۴ گزینه ۴

برای رسم $y = f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

دقت کنید تابع $f(-x)$ در اطراف $x = -۲$ مثبت است.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{\sin x}{f(-x)} = \frac{\sin(-۲)}{۰^+} = \frac{-\sin ۲}{۰^+} = \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty$$

نکته: $\sin ۲$ منظور سینوس زاویهٔ ۲ رادیان است و چون ۲ رادیان در ربع دوم قرار دارد، $\sin ۲ > ۰$ و صورت برابر عددی منفی می‌شود، بنابراین حد تابع اطراف $x = -۲$ برابر $-\infty$ می‌شود.



۳۵ گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^{۲}}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+۲)}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۵}{۲}}\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۲x+۲}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۵}}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^{۲}-۴x^{۲}-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})}=\lim_{x\to-۱}\frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

۳۶ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^{۲}+x}}{x^{n}+۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+|۲x|}{x^{n}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۲)\,x}{x^{n}}=۳\xrightarrow[a-۲=۳]{n=۱}a=۵$$

حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}[ax]$ را می‌خواهیم:

$$\lim_{x\to(-۱)^{-}}[۵x]=\left[(-۵)^{-}\right]=-۶$$

۳۷

گزینه ۴

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجهٔ مخرج ۲ است، پس درجهٔ صورت هم باید ۲ باشد. ضریب $x^۳$ را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۲x+۱)^۳+a(x-۱)^۳}{b(x+۲)^۲+(x-۳)^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۸x^۳+۱۲x^۲+۶x+۱+ax^۳-۳ax^۲+۳ax-a}{bx^۲+۴bx+۴b+x^۲-۶x+۹}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(۸+a)}^{\substack{\text{صفر}\\ \uparrow}}x^۳+(۱۲-۳a)x^۲+(۶+۳a)x+(۱-a)}{(b+۱)x^۲+(۴b-۶)x+(۴b+۹)}$$

$$x^۳\ \text{ضریب}=۰\Rightarrow ۸+a=۰\Rightarrow a=-۸$$

با جایگذاری $a=-۸$، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۳۶x^۲-۱۸x+۹}{(b+۱)x^۲+(۴b-۶)x+(۴b+۹)}=\frac{۳۶}{b+۱}$$

حاصل حد باید با $\frac{a}{۲}$ یعنی $-۴=\frac{-۸}{۲}$ برابر باشد. داریم:

$$\frac{۳۶}{b+۱}=-۴\Rightarrow b+۱=-۹\Rightarrow b=-۱۰$$

۳۸

گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{x}-\frac{۱}{x}=۲-\frac{۱}{\infty}=۲^- \quad , \quad \lim_{x\to۲^-}[-x]=[-۲^-]=-۲$$

$$\lim_{x\to+\infty}(gof)(x)=\lim_{x\to۲^-}g(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

۳۹ گزینه ۳

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} (fog)\,(x)$ ابتدا باید $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x+۴-۲}{x+۱} = \lim_{x\to+\infty} (۴-\frac{۲}{x+۱}) = ۴$$

$$\lim_{x\to+\infty} fog(x) = \lim_{x\to ۴^-} f(x) = [۰^-] = -۱$$

چون تابع f، دارای جزءصحیح است، باید معلوم شود که داخل جزءصحیح ۰^+ ایجاد می‌شود یا ۰^-.

برای این کار می‌توان از ضرب مزدوج در صورت و مخرج تابع f استفاده کرد.

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴^-} [\frac{(x-\sqrt{x+۱۲})(x+\sqrt{x+۱۲})}{x+\sqrt{x+۱۲}}] = \lim_{x\to ۴^-} [\frac{x^۲-x-۱۲}{x+\sqrt{x+۱۲}}]$$

$$= \lim_{x\to ۴^-} [\frac{(x-۴)\,(x+۳)}{x+\sqrt{x+۱۲}}] = [۰^-] = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (fog)\,(x) = -۱$$

دقت کنید از طریق رسم نمودار $y_۱ = x$ و $y_۲ = \sqrt{x+۱۲}$، هم می‌توان فهمید داخل جزءصحیح ۰^- ایجاد می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} (gof)\,(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x+۲}{x+۱} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{x} = ۴$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x-\sqrt{x+۱۲}] = \lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty$$

و درنهایت چون $\lim\limits_{x\to+\infty} (gof)\,(x) = ۴$، پس $[\lim\limits_{x\to+\infty} (gof)\,(x)] = ۴$. بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty} (fog)(x) + [\lim_{x\to+\infty} (gof(x))] = -۱+۴ = ۳$$

۴۰ گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-x[x]}{۱-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-x(x)}{۱-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^۲}{-x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

توجه کنید اگر عبارت داخل جزءصحیح بی‌نهایت باشد، می‌توانیم از جزءصحیح آن صرف‌نظر کنیم.