زیست شناسی

۱

گزینه ۴

کروموزوم‌ها در مرحله اول اینترفاز یعنی مرحله G_1 تک کروماتیدی بوده بنابراین برای مثال در هر کروموزوم شماره ۹ تنها یک دگره مربوط به کربوهیدرات‌های گروه خونی باید وجود داشته باشد در غیراین‌صورت جهش مضاعف‌شدگی رخ داده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ممکن است جهش از نوع واژگونی رخ داده باشد.

۲) ممکن است دگره نهفته این صفت در کروموزوم شماره ۱ وجود داشته باشد.

۳) ممکن است جهش از نوع حذف رخ داده باشد.

۲

گزینه ۴

در مطالعات ژنگان مقایسه‌ای چون تمام توالی دنای گونه‌ها مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد، توالی‌های حفظ‌شده بین ژنی (مثلاً در مورد توالی‌های افزاینده) نیز ممکن است مشاهده شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: در ژنگان مقایسه‌ای، ژنوم گونه‌های مختلف مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد، نه ژنوم افراد یک گونه!

گزینهٔ ۲: توالی حفظ‌شده به معنی خویشاوندی بیشتر بین گونه‌ها است. پس هرچه گونه‌ها، خویشاوندان دورتری باشند توالی حفظ‌شده کمتری خواهند داشت.

گزینهٔ ۳: در ژنوم ژن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند، نه الل‌ها!

۳

گزینه ۳

در صورت بروز جهش در جایی دور از جایگاه فعال یک آنزیم، احتمال تغییر عملکرد آن کم و یا حتی صفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در صورت وقوع جهش در جایگاه فعال آنزیم، به احتمال زیاد عملکرد آن تغییر خواهد کرد.

۲) ژنوم هسته‌ای در انسان شامل ۲۲ کروموزوم غیرجنسی و ۲ کروموزوم جنسی است.

۴) در صورت وقوع جهش در توالی افزاینده یا راه‌انداز می‌توان افزایش سرعت رونویسی را مشاهده کرد.

۴ گزینه ۳

همه موارد به‌جز مورد الف صحیح هستند.

بررسی سایر موارد:

الف) در یاخته (الف) که باقی‌مانده بافت خورش (دیپلوئید) را نشان می‌دهد که اطراف کیسه رویانی را پوشانده و چون مراحل تولید کیسه رویانی را گذرانده نیازی به تقسیم میوز نیست. یاخته (ب) تخمزا و هاپلوئید بوده و نمی تواند میوز انجام دهد و کراسینگ‌اوری رخ نخواهد داد.

ب) سلول‌های الف و ب حاصل تقسیم مستقیم میتوز هستند.

ج) سلول الف دیپلوئید و سلول ب هاپلوئید است پس یاخته الف ماده ژنتیکی بیشتری دارد و ازآنجایی‌که یاخته ب درشت‌تر است پس میزان سیتوپلاسم آن نیز بیشتر است.

د) سلول تخمزا فاقد قدرت میتوز است ولی سلول الف در هنگام تشکیل بافت خورش قدرت میتوز داشته است.

۵ گزینه ۴

در اثر وقوع جهش جانشینی و حذف و اضافه که با تغییر در یک نوکلئوتید همراه‌اند، به علت وجود رابطه مکملی بین بازها تغییر در یک نوکلئوتید، نوکلئوتید مقابل آن در رشته دیگر را نیز تغییر می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ارتباط با پیوند بین دایمر تیمین صحیح نمی‌باشد.

۲) در ارتباط با فرآیند نوترکیبی در پروفاز میوز یک صحیح نمی‌باشد.

۳) در ارتباط با گوناگونی دگره‌ای در کامه‌ها که به آرایش تترادها در متافاز میوز یک مربوط می‌باشد صادق نیست.

۶ گزینه ۲

جهش، گوناگونی دگره‌ای، نوترکیبی، رانش، انتخاب طبیعی و مهاجرت از عواملی هستند که روی تنوع افراد در جمعیت اثر دارند. این عوامل با تغییر در تنوع افراد می‌توانند سبب تغییر در خزانهٔ ژنی شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) جهش، رانش، مهاجرت، انتخاب طبیعی در تغییر فراوانی دگره‌ها نقش دارند. از این میان تنها جهش در ایجاد الل جدید نقش دارد.

۳) جهت تغییر گونه‌ها توسط انتخاب طبیعی تعیین می‌شود درحالی‌که جهش، رانش، مهاجرت، انتخاب طبیعی همگی می‌توانند روی خزانهٔ ژنی اثر بگذارند.

۴) انتخاب طبیعی می‌تواند سبب تغییر فراوانی ژن‌نمودهای ناسازگار شود. با انتخاب شدن افراد سازگارتر، تفاوت‌های فردی و درنتیجه گوناگونی کاهش می‌یابد. درنتیجه بقای جمعیت می‌تواند کاهش پیدا کند.

۷ گزینه ۳

منظور رانش دگره‌ای است که در جمعیت‌های کوچک اثر بزرگ‌تری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) این گزینه در ارتباط با رانش دگره‌ای و اثر شارش ژن یک‌سویه بر جمعیت مبدأ صحیح نمی‌باشد.

۲) منظور جهش می‌باشد که تأثیر آن بر رخ‌نمودهای جمعیت در همه جمعیت‌ها یکسان نیست.

۴) انتخاب طبیعی در انتخاب صفات سازگارتر با محیط نقش دارد نه ایجاد صفات سازگارتر با محیط.

۸

گزینه ۱

در هر دو گونه‌زایی هم‌میهنی و دگرمیهنی، خزانهٔ ژنی گونهٔ جدید از گونهٔ والد جدا شده، پس باید گامت‌هایی جدید تولید شود.
دقت کنید که چون در این گزینه به واژهٔ "والدین" اشاره شده است منظور تولیدمثل جنسی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲: نادرست - انتخاب طبیعی با گزینش افراد دارای رخ‌نمود سازگار، باعث تغییر در جمعیت می‌شود نه تغییر در فرد.

گزینهٔ ۳: نادرست - رانش دگره‌ای پدیده‌ای تصادفی است و در جمعیت‌هایی به‌شدت تأثیر می‌گذارد که از نظر تعداد و اندازه کم باشند.

گزینهٔ ۴: نادرست - مانع جغرافیایی که جلوی شارش ژنی را بگیرد در گونه‌زایی دگرمیهنی اهمیت دارد نه هم‌میهنی.

۹

گزینه ۱

بررسی صورت سؤال:

صورت سؤال مربوط به فصل تغییر در اطلاعات وراثتی است. اگر در یکی از تقسیمات دوم میوزِ یک یاختهٔ ۲n=۱۴ جدانشدن فام‌تن‌ها رخ بدهد، یاخته‌های حاصل به این صورت خواهند بود: یک یاخته بدون فام‌تن_ یک یاخته ۲n=۱۴، دو یاخته n=۷. از طرفی گامت‌هایی که گیاه چارلاد ایجاد می‌کند، ۲n=۱۴ هستند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: بخش اول این گزینه تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که یاخته‌ای که بدون فام‌تن است، با یاختهٔ ۲n=۱۴ لقاح انجام دهد. بخش دوم این گزینه نیز تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که یاخته‌هایی که ۲n=۱۴ هستند با یکدیگر لقاح انجام دهند. در هر دو حالت، تعداد زاده‌ها باهم برابر است.

گزینهٔ ۲: بخش اول این گزینه در صورتی اتفاق می‌افتد که هرکدام از دو یاخته‌ای که n=۷ است، با یاختهٔ ۲n=۱۴ لقاح انجام دهند؛ پس بخش اول این گزینه، دو زاده ایجاد می‌کند. بخش دوم این گزینه تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که یاخته‌ای که بدون فام‌تن است، با یاختهٔ ۲n=۱۴ لقاح انجام دهد.

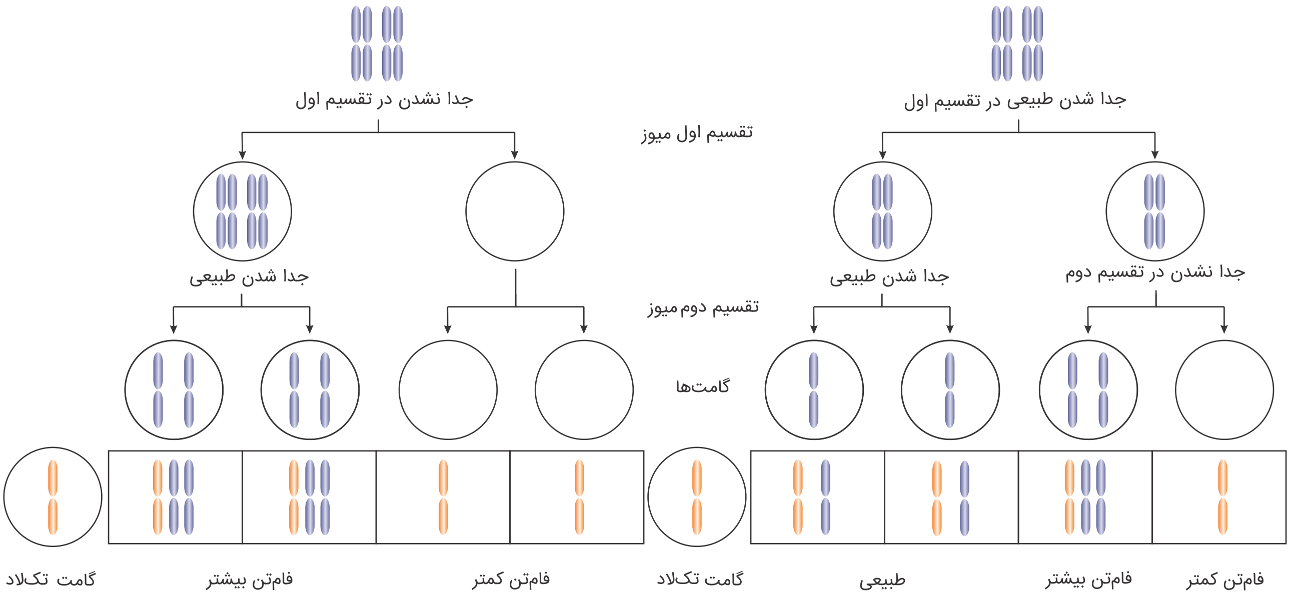
گزینهٔ ۳: گیاه ۳n=۲۱، زیستا ولی نازا است؛ بنابراین بخش اول این گزینه در صورتی اتفاق می‌افتد که هرکدام از دو یاخته‌ای که n=۷ است، با یاختهٔ ۲n=۱۴ لقاح انجام دهند؛ اما بخش دوم این گزینه تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که یاخته‌هایی که ۲n=۱۴ هستند با یکدیگر لقاح انجام دهند.

گزینهٔ ۴: منظور از بخش اول این گزینه، حالت‌هایی است که یاختهٔ ۲n=۱۴ با هریک از یاخته‌های ۲n=۱۴ و یا n=۷ لقاح انجام دهد که سه زاده ایجاد می‌کند. بخش دوم این گزینه تنها در صورتی اتفاق می‌افتد که یاخته‌ای که بدون فام‌تن است، با یاختهٔ ۲n=۱۴ لقاح انجام دهد.

۱۰

گزینه ۲

موارد "ج" و "د" جملهٔ موردنظر را به درستی تکمیل می‌کنند.



بررسی موارد:

الف) نادرست. یاخته‌های حاصل از خطا در میوز ۱ یا فاقد کروموزوم مورد نظر هستند، یا دارای هر دو کروموزوم همتا می‌باشند.

ب) نادرست. در صورتی که پدیده چلیپایی شدن رخ دهد و بعد خطا در میوز ۲ رخ بدهد فقط یک نوع دگره از هر ژن وجود ندارد.

ج) درست. ممکن است یک کروموزوم بیشتر یا یک کروموزوم کمتر از حالت طبیعی داشته باشد.

د) درست. یاخته‌های حاصل ممکن است فاقد کروموزوم مورد نظر باشند.

۱۱

گزینه ۱

فقط مورد "د" درست است.

بررسی موارد:

الف) نادرست. توالی‌های حفظ شده بین ژن‌های گونه‌های مختلف دیده می‌شوند و نشان می‌دهند که این ژن‌ها در گونه‌های مختلف فعالیت مشابهی دارند.

ب) نادرست. ژن‌های خاص در یک گونه، معمولاً موجب تمایز آن گونه با گونه‌های دیگر می‌شود.

ج) نادرست. تفاوت بین دو الل بارز و نهفته الزاماً به توالی نوکلئوتیدی آن‌ها مربوط نیست. ممکن است به مقدار پروتئین تولیدشده مربوط باشد.

د) درست. باتوجه‌به مقایسه توالی بین چند گونه در شکل ۱۳ فصل ۴ دوازدهم می‌توان نتیجه گیری کرد که در این نوع مقایسه جهش‌های جانشینی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱۲ گزینه ۱

از میان پدیده‌ها تنها جهش می‌تواند سبب افزایش تنوع و ایجاد الل جدید در جمعیت بشود. پدیده‌های همچون جهش، نوترکیبی و انتخاب طبیعی به‌تدریج تفاوت‌های دو جمعیت را زیاد می‌کنند. دقت داشته باشید نوترکیبی جزئی از سازوکارهای حفظ‌کنندهٔ گوناگونی در جمعیت است و نقشی در تغییر فراوانی الل‌ها در جمعیت ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نوترکیبی یا همان کراسینگ‌اور در مرحلهٔ پروفاز میوز ۱ رخ می‌دهد.

۲) نوترکیبی در عین وجود انتخاب طبیعی سبب حفظ گوناگونی در جمعیت می‌شود.

۳) رانش اللی در جمعیت‌های کوچک نسبت به جمعیت‌های بزرگ اثر بیشتری دارد.

۱۳ گزینه ۲

موارد "الف" و "ج" به درستی جمله موردنظر را کامل می‌کنند.

بررسی موارد:

همه گامت های حاصل از یاخته‌ای که در میوز ۱ خطا دارد، معیوب خواهند شد، چون یا یک کروموزوم اضافه‌تر و یا یک کروموزوم کمتر دارند. از طرفی یاخته‌ای که دچار یک جدا نشدن کروموزومی در میوز ۲ می‌شود، فقط در یاخته‌های حاصل از همان یاخته هاپلوئید مضاعف شده دچار ایراد خواهد بود. در یاخته‌های حاصل از یاخته دیگر مشکلی وجود نخواهد داشت. پس ۵۰٪ یاخته‌های حاصل طبیعی و ۵۰٪ یاخته‌های دیگر غیرطبیعی خواهند شد.

۱۴ گزینه ۱

اگر توالی آمینواسیدهای یک پروتئین تغییر کند، الزاماً عملکرد پروتئین دچار تغییر نمی‌شود. به‌طور مثال اگر پروتئین موردنظر را نوعی آنزیم در نظر بگیریم و جهش در جایی دورتر از جایگاه فعال آنزیم رخ دهد، احتمال تغییر در عملکرد آنزیم کم و یا حتی نزدیک به صفر است. (رد مورد اول). جهش جانشینی در ژن ممکن است در توالی تنظیمی ژن، مانند راه‌انداز یا افزاینده رخ دهد که درنتیجهٔ تغییر توالی نوکلئوتید رخ داده، میزان رونویسی آن ژن تغییر می‌کند (رد مورد دوم). ازآنجایی‌که ژن‌ها بخشی از ژنگان هستند، پس جهش در ژنگان الزاماً بر ژن تأثیری ندارد (رد مورد سوم). ژنگان (ژنوم) انسان شامل محتوای وراثتی هسته (دنای خطی) و راکیزه (دنای حلقوی) است (رد مورد چهارم).

۱۵ گزینه ۱

همهٔ موارد نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف: کراسینگ‌اور (چلیپایی شدن) تبادل قطعه بین دو کروموزوم همتا می‌باشد که جهش محسوب نمی‌شود.

ب: جهش واژگونی برای این گزینه صادق نیست!

ج: در فرآیند تقسیم میوز عدد کروموزومی سلول تغییر می‌کند ولی جهش محسوب نمی‌شود.

د: اگر کراسینگ‌اور رخ ندهد تفکیک کروموزومی منجر به نوترکیبی گامت‌ها نمی‌شود.

۱۶ **گزینه ۳**

جهش چه از نوع بزرگ یا کوچک موجب تغییر مادهٔ وراثتی می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در صورت رخ دادن جهش واژگونی، تغییری در تعداد نوکلئوتیدهای یک کروموزوم به وجود نمی‌آید.

۲) جهش‌های فام‌تنی حذفی غالباً باعث مرگ می‌شوند. لذا قطعاً سبب مرگ نمی‌شوند.

۴) جهش جابه‌جایی کوچک نیز می‌تواند باعث تغییر در ساختار مولکول‌های حاصل از عملکرد ژن شود.

۱۷ **گزینه ۱**

در جهش‌های کوچک، یک یا چند نوکلئوتید در ساختار مادهٔ وراثتی دچار تغییر می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۲": جهش حذف یا اضافه می‌تواند بدون تغییر در چارچوب خواندن باشد. (مثلاً ۳ نوکلئوتید جابه‌جا شود)

گزینهٔ "۳": جهش جانشینی اگر از نوع خاموش باشد، تغییر در محصول نهایی ژن ایجاد نمی‌کند.

گزینهٔ "۴": جهش دگرمعنا از نوع جهش‌های جانشینی است و باعث تغییر در طول دنا و رنا نمی‌شود.

۱۸ **گزینه ۴**

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱": در مورد جهش و شارش ژن، جهش در بسیاری از موارد، تأثیر فوری بر رخ‌نمود ندارد.

گزینهٔ "۲": رانش ژنی به سازش نمی‌انجامد.

گزینهٔ "۳": جهش بر اساس ویژگی‌های ظاهری و رفتاری رخ نمی‌دهد! (با آمیزش غیرتصادفی اشتباه نشود)

گزینهٔ "۴": جهش ممکن است در گونهٔ استرپتوکوکوس نومونیا دیده شود.

۱۹ **گزینه ۴**

انتخاب طبیعی می‌تواند علت مقاوم شدن باکتری‌ها به پادزیست‌ها را توضیح دهد. انتخاب طبیعی، همواره در جهت افزایش فراوانی افراد سازگارتر عمل می‌کند. با انتخاب شدن افراد سازگارتر، تفاوت‌های فردی و درنتیجه گوناگونی کاهش می‌یابد.

رانش ممکن است با حذف برخی دگره‌های موجود در یک جمعیت، تنوع دگره‌های جمعیت را کاهش دهد.

جهش می‌تواند باعث افزایش تنوع دگره‌ای درون جمعیت شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱": انتخاب طبیعی توانایی ایجاد دگرهٔ جدید را ندارد.

گزینهٔ "۲": رانش می‌تواند فراوانی دگره‌ها را در خزانهٔ ژنی تغییر دهد.

گزینهٔ "۳": رانش در جمعیت‌هایی با اندازهٔ کوچک‌تر، اثر بیشتری دارد.

۲۰ گزینه ۴

در جمعیت انسان، سه نوع ژن‌نمود برای بیماری گویچه‌های قرمز داسی‌شکل دیده می‌شود؛ $\mathrm{Hb^AHb^A}$، $\mathrm{Hb^AHb^S}$ و $\mathrm{Hb^SHb^S}$. افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^AHb^A}$ از نظر این بیماری سالم بوده و همواره دارای گویچه‌های قرمز طبیعی هستند. افراد دارای ژن‌نمود $\mathrm{Hb^AHb^S}$ در شرایط عادی دارای گویچه‌های قرمز طبیعی هستند، اما در شرایطی گویچه‌های آن‌ها می‌تواند تغییر شکل داده و به گویچه‌های قرمز داسی‌شکل تبدیل شود. افراد دارای ژن‌نمود $\mathrm{Hb^SHb^S}$ به بیماری گویچه‌های قرمز داسی‌شکل مبتلا بوده و فقط دارای گویچه‌های قرمز غیرطبیعی هستند.

بیماری مالاریا توسط نوعی انگل تک‌یاخته‌ای ایجاد می‌شود که بخشی از چرخهٔ زندگی خود را در گویچه‌های قرمز می‌گذراند. افرادی که گویچه‌های سالم دارند، یعنی $\mathrm{Hb^AHb^A}$ هستند در معرض خطر ابتلا به مالاریا قرار دارند. این انگل نمی‌تواند در افراد $\mathrm{Hb^AHb^S}$ سبب بیماری شود، چون وقتی این گویچه‌ها (فراوان‌ترین یاخته‌های خونی) را آلوده می‌کنند، آن‌ها داسی‌شکل می‌شوند و انگل می‌میرد. پس دقت داشته باشید با وجود اینکه افراد $\mathrm{Hb^AHb^S}$ در برابر مالاریا مقاوم‌اند، اما گویچه‌های قرمز آن‌ها ابتدا به انگل آلوده شده و پس از آن با داسی‌شکل شدن، باعث از بین رفتن انگل می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱": همان‌طور که گفته شد، هم افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^AHb^S}$ و هم افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^SHb^S}$ می‌توانند دارای گویچه‌های قرمز غیرطبیعی باشند که از این بین فقط افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^SHb^S}$ در سنین پایین می‌میرند.

گزینهٔ "۲": افراد با ژن‌نمودهای $\mathrm{Hb^AHb^S}$ و $\mathrm{Hb^AHb^A}$ می‌توانند دارای گویچه‌های قرمز طبیعی باشند. فقط گویچه‌های قرمز افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^AHb^S}$ در محیط‌هایی با اکسیژن کم، داسی‌شکل می‌شوند.

گزینهٔ "۳": همان‌طور که گفته شد، هم افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^AHb^S}$ و هم افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^SHb^S}$ می‌توانند دارای گویچه‌های قرمز غیرطبیعی باشند. افراد با ژن‌نمود $\mathrm{Hb^SHb^S}$ معمولاً در سنین پایین می‌میرند و به سن بلوغ نمی‌رسند.

فیزیک

۲۱ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه می‌تواند اجسام A، B و C هر سه دارای بار باشند، در آن صورت B و C باید مخالف A باشند، پس همدیگر را دفع می‌کنند و همچنین می‌توانند B و C خنثی بوده و توسط القا توسط جسم A جذب شده باشند و به هم نیرویی وارد نکنند و همچنین ممکن است یکی از B و C خنثی باشد و دیگری دارای بار باشد و در این حالت همدیگر را جذب خواهند کرد.

۲۲ گزینه ۴

گام اول: با فرض اینکه بار کره‌های A و B قبل از بسته شدن کلید $K_۱$ به ترتیب q_A و q_B و پس از بسته شدن آن به ترتیب q'_A و q'_B باشد باتوجه‌به قانون بقای بار الکتریکی داریم:

$$q'_A + q'_B = q_A + q_B \xrightarrow{(q'_A = q'_B)} ۲q'_B = q_A + q_B$$
$$\xrightarrow{(q'_B = -q_B)} q_A = -۳q_B \qquad (I)$$

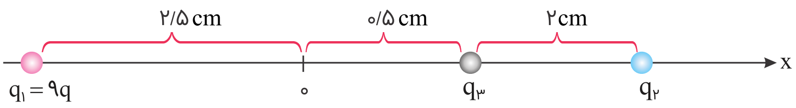
گام دوم: همانند گام قبل اگر بار کره‌های B و C قبل از بسته شدن کلید $K_۲$ به ترتیب q_B و q_C و پس از بسته شدن آن به ترتیب q''_B و q'_C باشد با استفاده از قانون بقای بار الکتریکی خواهیم داشت:

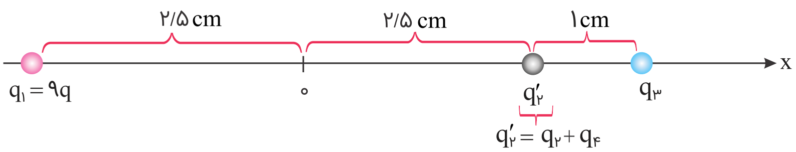
$$q''_B + q'_C = q_B + q_C \xrightarrow{(q''_B = q'_C)} ۲q''_B = q_B + q_C$$
$$\xrightarrow{(q''_B = ۳q_B)} q_C = ۵q_B \Rightarrow q_B = \frac{q_C}{۵} \qquad (II)$$

اکنون می‌توان با مقایسهٔ رابطه‌های (I) و (II) خواستهٔ تست را به دست آورد:

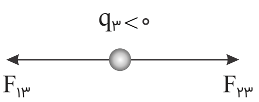
$$q_A = -۳q_B = -\frac{۳q_C}{۵} \Rightarrow ۵q_A = -۱۵q_B = -۳q_C$$

۲۳ گزینه ۴



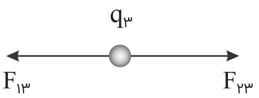


$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \begin{cases} F_{۱۳} = F_{۲۳} \\ q_۲ . q_۱ > ۰ \xrightarrow{q_۱ = ۹q > ۰} q_۲ > ۰ \end{cases}$$



$$\frac{k|q_۲||q_۳|}{۲^۲} = \frac{k|q_۱||q_۳|}{۳^۲} \Rightarrow \frac{|q_۲|}{۴} = \frac{۹q}{۹}$$

$$\Rightarrow |q_۲| = ۴q \Rightarrow q_۲ = ۴q \Rightarrow q'_۲ = ۴q + q_۴$$



$$\Rightarrow \begin{cases} q'_۲ < ۰ \\ F_{۲۳} = F_{۱۳} \Rightarrow \dfrac{|q'_۲|}{۱^۲} = \dfrac{|q_۱|}{۶^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴q + q_۴ = \frac{۱}{۳۶}(۹q) = \frac{q}{۴} \Rightarrow q_۴ = \frac{q}{۴} - ۴q$$

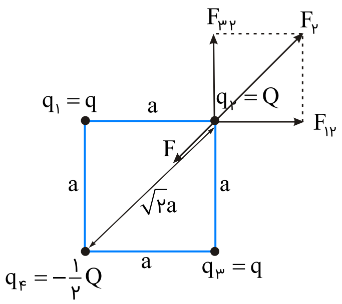
$$\Rightarrow q_۴ = -\frac{۱۵}{۴}q \Rightarrow \frac{q_۴}{q_۲} = \frac{-\frac{۱۵}{۴}q}{۴q} = -\frac{۱۵}{۱۶}$$

جعبه ابزار: اینکه برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ روی خط واصل دو بار نقطهٔ $q_۱$ و $q_۲$ در چه مکانی صفر است.

چالش سؤال: تشخیص اینکه چون پس از اضافه کردن بار $q_۴$ به $q_۲$، محل صفر شدن نیروی الکتریکی به خارج فاصلهٔ دو بار منتقل شده و همچنان $q_۱ > ۰$ است. پس باید: $q'_۲ = (q_۲ + q_۳) < ۰$ و $|q'_۲| < q_۱$ شود و مقدار $q_۳$ تأثیر در محاسبات ندارد.

۲۴ گزینه ۲

باتوجه‌به بردارهای نیرو و اینکه برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ صفر است، داریم:
(دقت شود برای اینکه برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ صفر شود، باید بارهای q و Q همنام باشند تا مطابق شکل این اتفاق بیفتد)



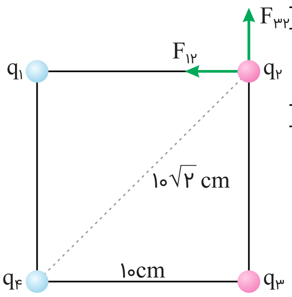
$$\begin{cases} F_{۱۲}=\dfrac{kq_۱q_۲}{r_{۱۲}^۲}=\dfrac{kqQ}{a^۲} \\ F_{۳۲}=\dfrac{kq_۳q_۲}{r_{۳۲}^۲}=\dfrac{kqQ}{a^۲} \end{cases} \Rightarrow F_۲=\sqrt{۲}\dfrac{kqQ}{a^۲}$$

$$F_{۴۲}=\frac{kq_۴q_۲}{r_{۴۲}^۲}=\frac{k\frac{۱}{۲}QQ}{۲a^۲}=\frac{۱}{۴}\frac{kQ^۲}{a^۲}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۲$ صفر است $\Rightarrow F_۲=F_{۴۲}\Rightarrow \sqrt{۲}\dfrac{kqQ}{a^۲}=\dfrac{۱}{۴}\dfrac{kQ^۲}{a^۲}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{q}=۴\sqrt{۲}$$

۲۵ گزینه ۴



$$F_{۱۲}=\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}=۹\times ۱۰^۹\times\frac{۵\times ۱۰^{-۶}\times ۲\times ۱۰^{-۶}}{(۰/۱)^۲}=۹\,N$$

$$F_{۳۲}=\frac{kq_۳q_۲}{r^۲}=۹\times ۱۰^۹\times\frac{۵\times ۱۰^{-۶}\times ۲\times ۱۰^{-۶}}{(۰/۱)^۲}=۹\,N$$

برآیند دو نیروی $F_{۱۲}$ و $F_{۳۲}$ برابر $۹\sqrt{۲}\,N$ است، پس $F_{۴۲}$ باید از نوع جاذبه باشد:

$$F_T=-۱۸\,N\Rightarrow ۱۸^۲-(۹\sqrt{۲})^۲=F_{۴۲}^۲\Rightarrow F_{۴۲}^۲=۱۶۲\Rightarrow F_{۴۲}=۹\sqrt{۲}\,N$$

$$F_{۴۲}=\frac{kq_۴q_۲}{r_{۲۴}^۲}=۹\sqrt{۲}=\frac{۹\times ۱۰^۹\times q_۴\times ۲\times ۱۰^{-۶}}{(۱۰\sqrt{۲}\times ۱۰^{-۲})^۲}\Rightarrow q_۴=-۱۰\sqrt{۲}\,\mu C$$

۲۶ گزینه ۲

با استفاده از رابطهٔ $E=\dfrac{F}{q_۰}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_۰}=\frac{F_x\vec{i}}{q_۰}+\frac{F_y\vec{j}}{q_۰}=\frac{۱۳/۵}{۳\times ۱۰^{-۶}}\,\vec{i}+\frac{۱۸}{۳\times ۱۰^{-۶}}\,\vec{j}=۴/۵\times ۱۰^۶\,\vec{i}+۶\times ۱۰^۶\,\vec{j}$$

$$E_T=\sqrt{(۴/۵\times ۱۰^۶)^۲+(۶\times ۱۰^۶)^۲}=۷/۵\times ۱۰^۶\,N/C$$

۲۷ گزینه ۱

بزرگی میدان الکتریکی بار q_1 در نقطهٔ A را برابر E در نظر می‌گیریم. در این صورت بزرگی میدان بار q_1 در نقطهٔ A برحسب E برابر است با (هر واحد از محورها را r در نظر گرفته‌ایم):

$$E_{1A} = \frac{k|q_1|}{(2r)^2} = \frac{k|q_1|}{4r^2} = E \quad , \quad E_{2A} = \frac{k|q_2|}{(4r)^2} = \frac{k|2q_1|}{16r^2} = \frac{k|q_1|}{8r^2} = \frac{E}{2}$$

دو میدان E_{1A} و E_{2A} در نقطهٔ A بر هم عمودند، پس بزرگی میدان برآیند آن‌ها که برابر $2\sqrt{5} \times 10^5\,N/C$ است از رابطهٔ $\sqrt{E_{1A}^2 + E_{2A}^2}$ به دست می‌آید. پس:

$$\sqrt{E_{1A}^2 + E_{2A}^2} = E_A \Rightarrow \sqrt{E^2 + (\frac{E}{2})^2} = 2\sqrt{5} \times 10^5 \Rightarrow E = 4 \times 10^5\,N/C$$

با استفاده از رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^2}$ به‌صورت نسبتی، بزرگی میدان الکتریکی هر یک از بارها در نقطهٔ O را به دست می‌آوریم:

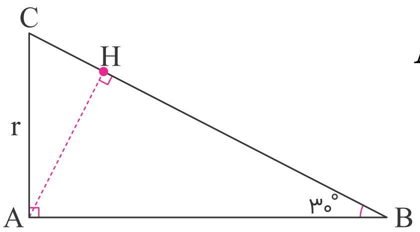
$$\begin{cases} \frac{E_{1O}}{E_{1A}} = (\frac{r_{1A}}{r_{1O}})^2 \Rightarrow \frac{E_{1O}}{4 \times 10^5} = (\frac{2r}{4r})^2 \Rightarrow E_{1O} = 10^5\,N/C \\ \frac{E_{2O}}{E_{2A}} = (\frac{r_{2A}}{r_{2O}})^2 \Rightarrow \frac{E_{2O}}{2 \times 10^5} = (\frac{4r}{2r})^2 \Rightarrow E_{2O} = 8 \times 10^5\,N/C \end{cases}$$

برآیند دو میدان به‌دست‌آمده که در نقطهٔ O بر هم عمودند، برابر است با:

$$E_O = \sqrt{E_{1O}^2 + E_{2O}^2} = \sqrt{(10^5)^2 + (8 \times 10^5)^2} = \sqrt{65} \times 10^5\,N/C$$

۲۸ گزینه ۳

گام اول: مطابق شکل زیر، با فرض اینکه اندازهٔ AC برابر r باشد، فواصل موردنیاز برای محاسبهٔ میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم:



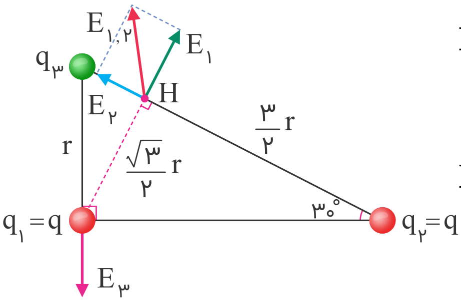
$$\overset{\Delta}{ABC}\ : \tan ۳۰ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{r}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۳}{\sqrt{۳}}r = \sqrt{۳}r$$

$$\overset{\Delta}{AHB}\ : \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{\sqrt{۳}r} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{\sqrt{۳}r} \Rightarrow BH = \frac{۳}{۲}r$$

گام دوم: اکنون میدان الکتریکی حاصل از بارها را در نقاط موردنظر محاسبه می‌کنیم؛ باتوجه‌به شکل زیر، داریم:



$$E_۱ = \frac{kq_۱}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲}r)^۲} = \frac{kq}{\frac{۳}{۴}r^۲} = \frac{۴kq}{۳r^۲}$$

$$E_۲ = \frac{kq_۲}{(\frac{۳}{۲}r)^۲} = \frac{kq}{\frac{۹}{۴}r^۲} = \frac{۴kq}{۹r^۲}$$

$$E_{۱,۲} = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} = \sqrt{(\frac{۴kq}{۳r^۲})^۲ + (\frac{۴kq}{۹r^۲})^۲} = \frac{۴kq}{r^۲}\sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۸۱}}$$

$$= \frac{۴kq}{۹r^۲}\sqrt{\frac{۱۰}{۸۱}} = \frac{۴kq}{r^۲} \times \frac{\sqrt{۱۰}}{۹} = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۹}\frac{kq}{r^۲}$$

$$E_۳ = \frac{kq_۳}{r^۲}$$

طبق دادهٔ تست، $E_{۱,۲}$ برابر $E_۳$ است، بنابراین:

$$E_{۱,۲} = E_۳ \Rightarrow \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۹}\frac{\cancel{k}q}{\cancel{r^۲}} = \frac{\cancel{k}q_۳}{\cancel{r^۲}} \Rightarrow q_۳ = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۹}q$$

$$\Rightarrow \frac{q_۳}{q} = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۹} \xrightarrow{(q_۱=q)} \frac{q_۳}{q_۱} = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۹}$$

۲۹ گزینه ۳

روش اول: (کلاسیک)

فاصلهٔ بین بارهای $q_۱$ تا $q_۲$ را حساب می‌کنیم.

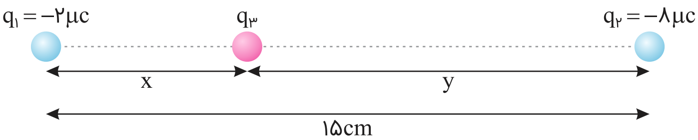
$$r_{۱,۲} = \sqrt{(۱۲-۰)^۲ + (۰-۹)^۲} = ۱۵\,\text{cm}$$

چون دو بار هم نام‌اند:

بار $q_۳$ باید در نقطه‌ای بین خط واصل دو بار قرار بگیرد. اگر فاصله آن تا بار $q_۱$ را x بگیریم، فاصلهٔ آن تا بار $q_۲$ برابر $(۱۵-x)\,\text{cm}$ است. چون نیروی خالص وارد بر آن صفر است. پس میدان دو بار در محل آن صفر است یعنی میدان دو بار $q_۱$ و $q_۲$ در محل آن باهم هم‌اندازه است. پس:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \cancel{k}\frac{\overset{۱}{\cancel{|q_۱|}}}{x^۲} = \cancel{k}\frac{\overset{۴}{\cancel{|q_۲|}}}{(۱۵-x)^۲} \xrightarrow{\sqrt{}} \frac{۱}{x} = \frac{۲}{۱۵-x} \Rightarrow x = ۵\,\text{cm}$$

روش دوم:

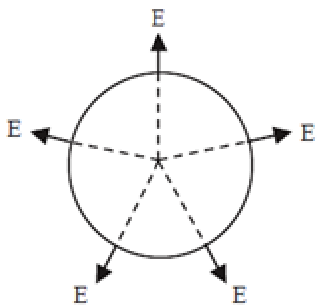


$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \sqrt{\left|\dfrac{q_۲}{q_۱}\right|} = ۲ \\ x + y = ۱۵\,\text{cm} \end{cases} \Rightarrow \underline{x = ۵\,\text{cm}}$$

۳۰

گزینه ۴

اندازهٔ میدان الکتریکی در تمام نقاط روی دایره یکسان است؛ ولی چون جهت میدان در نقاط مختلف متفاوت است؛ پس این میدان غیریکنواخت است.



$$E = \frac{kq}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^9 \, N/C$$

۳۱

گزینه ۴

ابتدا اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B را با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ به دست می‌آوریم. چون بار مثبت در جهت میدان جابه‌جا شده است، انرژی پتانسیل الکتریکی بار کاهش می‌یابد.

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-0/4 \times 10^{-3}}{+4 \times 10^{-6}} = -100 \, V \Rightarrow V_A - V_B = +100 \, V$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ B و C هم‌اندازه با اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ C و D است زیرا اندازهٔ جابه‌جایی در هر دو مسیر در راستای میدان باهم برابر است. پس:

$$|\Delta V_{C,D}| = |\Delta V_{B,C}| = |Ed_{BC}| = 10^2 \times 0/4 = 40 \, V \xrightarrow{V_D > V_C} V_D - V_C = 40 \, V$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{V_A - V_B}{V_D - V_C} = \frac{100}{40} = 2/5$$

۳۲

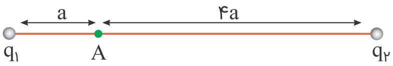
گزینه ۳

پتانسیل الکتریکی محل بار مثبت کاهش و محل بار منفی افزایش می‌یابد و انرژی پتانسیل آن‌ها به یک‌میزان کاهش یافته و بنابراین انرژی جنبشی آن‌ها به یک‌میزان افزایش می‌یابد.

۳۳ گزینه ۴

$$E = \frac{kq}{r^۲}$$

گام اول:

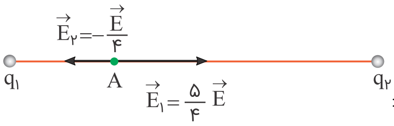


$$\text{قبل از حذف } q_۱ \Rightarrow E_A = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲$$

$$\text{بعد از حذف } q_۱ \Rightarrow E'_A = \vec{E} = \vec{E}_۲ = -\frac{\vec{E}}{۴}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۱ + (-\frac{\vec{E}}{۴}) \Rightarrow \vec{E}_۱ = \frac{۵}{۴}\vec{E}$$

گام دوم: تشخیص این که $q_۱$ و $q_۲$ هم‌علامتند یا مختلف‌العلامت؛ فرض کنید $\vec{E}$ از چپ به راست باشد:



$$\Rightarrow \begin{cases} q_۱ > ۰ \\ q_۲ > ۰ \end{cases}$$

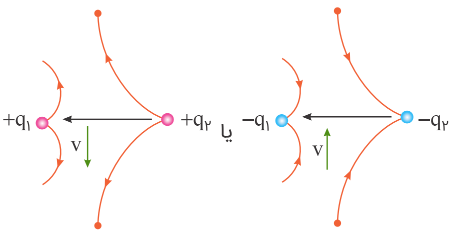
گام سوم: یافتن $\frac{q_۲}{q_۱}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_۲ = -\frac{\vec{E}}{۴} \\ \vec{E}_۱ = \frac{۵}{۴}\vec{E} \end{cases} \Rightarrow |\frac{\vec{E}_۲}{\vec{E}_۱}| = \left(\frac{|q_۲|}{|q_۱|}\right)\left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow |\frac{q_۲}{q_۱}|(\frac{a}{۴a})^۲ = \frac{۱}{۵} \Rightarrow |\frac{q_۲}{q_۱}| = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\xrightarrow{|\frac{q_۲}{q_۱}|>۰} |\frac{q_۲}{q_۱}| = \frac{۱۶}{۵} \text{ , } |q_۲| > |q_۱|$$

گام سوم: در نقطه‌ای در سمت چپ نقطهٔ O، $\vec{E}_T = \vec{0}$ پس از حوالی $q_۲$ تا وسط فاصلهٔ دو بار بسته به این که $\begin{cases} q_۱ > ۰ \\ q_۲ > ۰ \end{cases}$ یا $\begin{cases} q_۱ < ۰ \\ q_۲ < ۰ \end{cases}$.



۳۴ گزینه ۱

بنابر قضیه کار- انرژی جنبشی و تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_E}{q} \;,\; W_T = \Delta K$$

گام اول:

$$W_T = W_{ext} + W_E = \Delta K \;(۱)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_E}{q}$$

$$\Rightarrow W_E = -q\Delta V = -(۲/۵ \times ۱۰^{-۳})(-۱۰ - (-۱۲))$$

$$\Rightarrow W_E = -۵ \times ۱۰^{-۳} J \,(۲)$$

گام دوم:

$$\Delta K = \frac{۱}{۲} m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = \frac{۱}{۲}(۲ \times ۱۰^{-۳})(۳^۲ - ۱^۲)$$

$$\Rightarrow \Delta K = ۸ \times ۱۰^{-۳} J \,(۳)$$

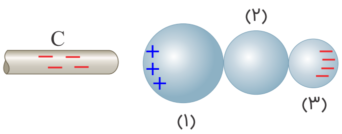
گام سوم:

$$\xrightarrow{۱,۲,۳} W_{ext} = \Delta K - W_E = ۸ \times ۱۰^{-۳} J - (-۵ \times ۱۰^{-۳} J)$$

$$\Rightarrow W_{ext} = ۱۳ \times ۱۰^{-۳} J = ۱۳ mJ$$

۳۵ گزینه ۲

با توجه به جدول سری داده شده در اثر مالش C با B بار C منفی می‌شود و اگر آن را به کره‌ها نزدیک کنیم بار نقاط ۱ و ۲ خنثی و بار نقطهٔ ۳ منفی می‌شود.



۳۶ گزینه ۲

$$V_{max} = Ed_{max} \Rightarrow V_{max} = ۲۰ \times \frac{۱۰^۳}{۱۰^{-۳}} \times ۲ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۳} = ۴۰۰۰ V$$

چون فاصلهٔ دو صفحه برحسب میلی‌متر داده‌شده بود، می‌توانستیم آن را به متر تبدیل نکرده و قدرت دی‌الکتریک را هم برحسب ولت بر میلی‌متر بگذاریم.

۳۷ گزینه ۳

$$E = \frac{V}{d} = \frac{q}{\kappa\varepsilon_\circ A} \xrightarrow{\kappa=۱} E = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}$$

طبق رابطهٔ $E = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}$ چون مقدار q و A ثابت است با نزدیک کردن صفحات به هم میدان الکتریکی میان صفحات ثابت است پس نیروی الکتریکی ثابت مانده و چون نیروی وزن هم ثابت است پس بار همچنان در حال تعادل باقی می‌ماند.

۳۸ گزینه ۱

گام اول: بار اولیهٔ خازن را برحسب میکروکولن $Q_۱$ در نظر می‌گیریم. با انتقال بار $-۶\,\mu C$ از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت بار خازن به $Q_۲ = Q_۱ - ۶$ می‌رسد.

گام دوم: انرژی خازن در هر دو حالت را برحسب Q و C به دست می‌آوریم و اختلاف این دو انرژی را برابر با $۲۸/۵\,\mu J$ قرار می‌دهیم؛ بنابراین:

$$\begin{cases} U_۱ = \frac{Q_۱^۲}{۲C} = \frac{Q_۱^۲}{۲\times ۱۲} = \frac{Q_۱^۲}{۲۴}\,(\mu J) \\ U_۲ = \frac{Q_۲^۲}{۲C} = \frac{(Q_۱-۶)^۲}{۲C} = \frac{(Q_۱-۶)^۲}{۲۴}\,(\mu J) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_۱ - U_۲ = ۲۸/۵ \Rightarrow \frac{Q_۱^۲}{۲۴} - \frac{(Q_۱-۶)^۲}{۲۴} = ۲۸/۵$$

$$\frac{Q_۱^۲ - (Q_۱^۲ - ۱۲Q_۱ + ۳۶)}{۲۴} = ۲۸/۵\,\mu J$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲Q_۱ - ۳۶}{۲۴} = ۲۸/۵ \Rightarrow \frac{۱۲(Q_۱-۳)}{۲۴} = ۲۸/۵$$

$$\Rightarrow \frac{Q_۱-۳}{۲} = ۲۸/۵ \Rightarrow Q_۱ = ۶۰\,\mu C$$

گام سوم: حالا از رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$، مقدار $V_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{Q_۱}{V_۱} \Rightarrow ۱۲ = \frac{۶۰}{V_۱} \Rightarrow V_۱ = ۵V$$

توجه کنید: در رابطهٔ $U = \frac{Q^۲}{۲C}$، اگر Q و C را به ترتیب برحسب μC و μF قرار دهیم، U برحسب میکروژول به دست می‌آید.

۳۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} U_۱ = \frac{۱}{۲}\frac{q_۱^۲}{C} = \frac{(q \times ۱۰^{-۳})^۲}{۲ \times ۱۲ \times ۱۰^{-۶}} = \frac{q^۲}{۲۴} \\ U_۲ = \frac{۱}{۲}\frac{q_۲^۲}{C} = \frac{\left[(q+۳) \times ۱۰^{-۳}\right]^۲}{۲ \times ۱۲ \times ۱۰^{-۶}} = \frac{(q+۳)^۲}{۲۴} \end{cases}$$

نکته: انرژی مصرف‌شده، در خازن ذخیره می‌شود و به همین دلیل، باید اختلاف انرژی در دو حالت، برابر ۸ ژول باشد.

$$\frac{(q+۳)^۲}{۲۴} - \frac{q^۲}{۲۴} = ۸ \Rightarrow (q+۳)^۲ - q^۲ = (۸ \times ۲۴)$$
$$\Rightarrow \cancel{q^۲} + ۶q + ۹ - \cancel{q^۲} = ۱۹۲ \Rightarrow ۶q = ۱۸۳ \Rightarrow q = \frac{۱۸۳}{۶} = ۳۰/۵\,(\mu C)$$

۴۰ گزینه ۲

ظرفیت جدید خازن (C') نسبت به ظرفیت قبل از تغییرات برابر است با:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'} = ۴ \times ۱ \times \frac{d}{۲d} = ۲$$

چون خازن از باتری جدا است، بار خازن ثابت است.

$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{q^۲}{۲C'}}{\frac{q^۲}{۲C}} = \frac{C}{C'} = \frac{۱}{۲}$$

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \frac{V'}{V} \times \frac{d}{d'} = \frac{\frac{q}{C'}}{\frac{q}{C}} \times \frac{d}{d'} = \frac{C}{C'} \times \frac{d}{d'} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۴۱ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(3+3h)-f^2(3-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+3h)-f(3-2h)}{h}\times\frac{f(3+3h)+f(3-2h)}{1}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+3h)-f(3-2h)}{h}\right)\times\lim_{h\to 0}\left(f(3+3h)+f(3-2h)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+3h)-f(3-2h)+f(3)-f(3)}{h}\right)\times\left(f(3)+f(3)\right)$$

$$=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{h}\right)\times 2f(3)$$

$$=\left(3\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}-(-2)\lim_{h\to 0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}\right)\times 2f(3)$$

$$=\left(3f'(3)-(-2)f'(3)\right)\times 2f(3)=10f'(3)f(3)=10\times 3\times 4=120$$

راه‌حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a-nh)}{kh}=\left(\frac{m-n}{k}\right)f'(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-f(3-2h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\left(f(3+3h)+f(3-2h)\right)$$

$$=\left(\frac{3-(-2)}{1}\right)f'(3)\times 2f(3)=10f'(3)f(3)=10\times 3\times 4=120$$

۴۲ گزینه ۳

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}$$

$$=\frac{(1+h)^2-3(1+h)-(-2)}{h}=\frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{h}$$

$$=\frac{h^2-h}{h}=\frac{h(h-1)}{h}=h-1$$

۴۳

گزینه ۱

خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x = ۲$، از دو نقطهٔ $A\,(۲, ۳)$ و $B(۰, \frac{۳}{۲})$ می‌گذرد. شیب این خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{۳}{۲} - ۳}{۰ - ۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow f'\,(۲) = \frac{۳}{۴}$$

حالا حاصل حد داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f^{۲}\,(x) - ۳f\,(x)}{x^{۲} - ۳x + ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)(f(x) - \overbrace{۳}^{f(۲)})}{(x - ۱)\,(x - ۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{f\,(x) - f\,(۲)}{x - ۲} \times \lim_{x\to ۲} \frac{f\,(x)}{x - ۱}$$

$$= f'\,(۲) \times \frac{f\,(۲)}{۲ - ۱} = \frac{۳}{۴} \times ۳ = \frac{۹}{۴}$$

۴۴

گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲} \frac{F(\overbrace{\frac{۱}{x}}^{t}) - F(\frac{۱}{۲})}{x - ۲} = \lim_{t\to \frac{۱}{۲}} \frac{F\,(t) - F(\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{t} - ۲} = \lim_{t\to \frac{۱}{۲}} \frac{F\,(t) - F(\frac{۱}{۲})}{-\frac{۲}{t}(t - \frac{۱}{۲})}$$

$$= \lim_{t\to \frac{۱}{۲}} (-\frac{t}{۲}) \lim_{t\to \frac{۱}{۲}} \frac{F\,(t) - F(\frac{۱}{۲})}{t - \frac{۱}{۲}} = -\frac{۱}{۴}F'(\frac{۱}{۲}) = ۴ \Rightarrow F'(\frac{۱}{۲}) = -۱۶$$

۴۵

گزینه ۲

عبارت خواسته‌شده برابر $f''(۲)$ است، ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x - ۱)^{۲}}{x^{۲} - x} = \frac{(x - ۱)^{۲}}{x(x - ۱)} = \frac{x - ۱}{x}$$

دو بار از تابع فوق مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-۲}{x^{۳}} \Rightarrow f''(۲) = \frac{-۲}{۸} = -\frac{۱}{۴}$$

۴۶ گزینه ۳

$$\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}=\frac{f'g-fg'}{fg}=\frac{(\frac{f}{g})'\times g^{۲}}{fg}=(\frac{f}{g})'(\frac{g}{f})$$

$\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-۱}}{x}}=\frac{\frac{\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-۱}}{x}}=\sqrt{x^{۲}+x}$$

مشتق می‌گیریم:

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^{۲}+x}}$$

پس داریم:

$$(\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^{۲}+x}})(\frac{\frac{\sqrt{x-۱}}{x}}{\sqrt{\frac{x^{۲}-۱}{x}}})\xrightarrow{x=۳}(\frac{۷}{۴\sqrt{۳}})(\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}})=\frac{۷}{۲۴}$$

۴۷ گزینه ۴

حاصل حد مخرج کسر برابر با صفر است ولی چون حاصل حد داده‌شده عددی متناهی است، پس حاصل حد صورت کسر نیز برابر با صفر بوده است.

$$\lim_{h\to ۰}\left(f\left(h^۴+۲\right)-f\left(h^۴-۲\right)+۳\right)=۰\Rightarrow f(۲)-f(-۲)+۳=۰\Rightarrow ۴n-۴m=-۳$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f\left(h^۴+۲\right)-f\left(h^۴-۲\right)+۳}{h^۴}=۶$$

با فرض $h^۴=t$ ، اگر $h\to ۰$ آنگاه $t\to ۰^+$؛ بنابراین:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-f(-۲+t)+۳}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}-\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(-۲+t)-f(-۲)}{t}+\lim_{t\to ۰^+}\frac{\overset{۰}{\cancel{f(۲)-f(-۲)+۳}}}{t}=f'_+(۲)-f'_+(-۲)=۶$$

$$x\to ۲^+\Rightarrow f(x)=m(x-۲)+n(x+۲)\Rightarrow f'_+(۲)=m+n$$

$$x\to (-۲)^+\Rightarrow f(x)=-m(x-۲)+n(x+۲)\Rightarrow f'_+(-۲)=-m+n$$

$$f'_+(۲)-f'_+(-۲)=۶\Rightarrow m+n-(-m+n)=۶\Rightarrow m=۳$$

$$۴n-۴m=-۳\xrightarrow{m=۳}۴n-۱۲=-۳\Rightarrow n=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴n-m=۹-۳=۶$$

۴۸

گزینه ۱

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.

ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۴۹

گزینه ۲

برای اینکه عرض نقطهٔ A و عرض نقطهٔ دوم برابر باشند، باید خط مماس افقی باشد؛ یعنی شیب مماس صفر است، پس:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(۱, -۲)$ یا $(-۱, ۲)$ است که معادلهٔ مماس در آن‌ها به ترتیب $y = -۲$ و $y = ۲$ است. فقط خط $y = ۲$ جهت مثبت محور yها را قطع می‌کند که عرض آن نقطه نیز ۲ است.

۵۰ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+1\Rightarrow \sqrt{x}(y-1)=y+1\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=g(x)$$

$$g'(x)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\times\frac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(2)=2\times3\times\frac{-2}{1}=-12$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow 2\sqrt{x}-2=\sqrt{x}+1\Rightarrow x=9$$

پس نقطهٔ $A(9,2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x)=\frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(9)=\frac{-2}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطهٔ $A'(2,9)$ برابر -12 است.

۵۱ گزینه ۱

می‌دانیم شیب‌خط مماس رسم‌شده روی تابع $f(x)$ برابر $f'(1)$ است. از طرفی شیب خط رسم‌شده برابر تانژانت زاویه‌ای است که با قسمت مثبت محور xها می‌سازد.

پس داریم:

$$f'(1)=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan45^\circ=-1$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to a}f'(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$$

از طرف دیگر سؤال از ما حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\sqrt{x}-1}$ را می‌خواهد:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{(f(x)-2)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}\times(\sqrt{x}+1)=f'(1)\times(1+1)=-1\times2=-2$$

۵۲

گزینه ۱

جعبهٔ ابزار: شیب خط مماس بر منحنی برابر مقدار مشتق تابع در نقطه است.

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = -6x^2 + 6x - 1$$

تابع مشتق، چندجمله‌ای درجهٔ دوم است و ماکزیمم آن در $x = -\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد.

$$x = -\frac{6}{2(-6)} = \frac{1}{2}$$

بیشترین مقدار شیب در $x = \frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = -6(\frac{1}{2})^2 + 6(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2}$$

عرض خود تابع را نیز در $x = \frac{1}{2}$ پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

معادلهٔ خطی که با شیب $\frac{1}{2}$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2}, 1)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})$$

y را صفر می‌گذاریم و x را پیدا می‌کنیم:

$$0 - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow x - \frac{1}{2} = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

چالش سؤال: تشخیص ماکزیمم مشتق

۵۳ گزینه ۱

نکته: توابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ای به طول $x_۰$ که به ازای آن عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح شود، معمولاً ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. زمانی تابع در $x_۰$ مشتق‌پذیر می‌شود که $x_۰$ طول $\min$ (نسبی) عبارت داخل جزء صحیح بوده و یا در $x_۰$، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجهٔ ۲ (یا بیشتر از ۲) وجود داشته باشد.

ابتدا از روی حدود x، حدود عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم. داریم:

$$۴ < x < ۸ \Rightarrow \frac{۴}{۳} < \frac{x}{۳} < \frac{۸}{۳}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\frac{x}{۳}$ در تنها $x = ۶$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد. چون در صورت مسئله به این جمله اشاره شده است که تابع در این بازه مشتق‌پذیر است. پس باید در $x = ۶$، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجهٔ ۲ قرار دهیم تا تابع در این بازه مشتق‌پذیر باشد. به عبارت دیگر $x = ۶$ ریشهٔ مضاعف عبارت پشت جزء صحیح باشد. داریم:

$$\text{عامل صفرشونده در } x = ۶ \text{ از درجهٔ ۲} = (x - ۶)^۲ = x^۲ - ۱۲x + ۳۶ = x^۲ + bx + c \Rightarrow \begin{cases} b = -۱۲ \\ c = ۳۶ \end{cases}$$

درنتیجه حاصل $b + ۲c$ برابر است با:

$$b + ۲c = (-۱۲) + ۲(۳۶) = ۶۰$$

۵۴ گزینه ۲

جعبهٔ ابزار: برای اینکه یک تابع در ضابطه‌ای مشتق‌پذیر باشد باید اولاً هریک از ضابطه‌های آن روی دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشند و ثانیاً در نقطهٔ مرزی تابع پیوسته و دارای مشتقات چپ و راست برابر باشند.

$$g(x)=\begin{cases} ۳ax^{۲}+۲bx+۳a-b & ;x<k \\ ۶ax+۲b & ;x\geq k \end{cases}$$

هریک از ضابطه‌های تابع g چندجمله‌ای هستند، بنابراین روی دامنهٔ خودشان مشتق‌پذیر می‌باشند. کافی است تابع در نقطهٔ مرزی $x=k$ پیوسته و مشتقات چپ و راست آن در k برابر باشند.

$$g(k^{-})=g(k^{+})\Rightarrow ۳ak^{۲}+۲bk+۳a-b=۶ak+۲b$$

$$g'(x)=\begin{cases} ۶ax+۲b & ;x<k \\ ۶a & ;x\geq k \end{cases}$$

$$g'_{-}(k)=g'_{+}(k)\Rightarrow ۶ak+۲b=۶a$$

$$\Rightarrow ۲b=۶a-۶ak\Rightarrow b=۳a-۳ak$$

رابطهٔ فوق را در معادلهٔ اول جایگذاری می‌کنیم.

$$۳ak^{۲}+۶ak-۶ak^{۲}+۳a=۶ak+۹a-۹ak$$

$$\Rightarrow ۳ak^{۲}-۹ak+۶a=۰\Rightarrow\begin{cases} k=۱ \\ k=۲ \end{cases}\Rightarrow k_{max}=۲$$

چالش سؤال: حل دستگاه معادلات حاصل از نوشتن شرط‌های پیوستگی و مشتق‌پذیری.

۵۵ گزینه ۴

نکته: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x)=\sqrt[۳]{g(x)}$ در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $g(x)=۰$ دارای مماس قائم است.

در اینجا $x=۱$ و $x=b$ ریشه‌های داخل رادیکال هستند:

$$x^{۲}+ax+۲=۰\xrightarrow[\text{هستند}]{\text{ریشه‌ها ۱ و b}}\begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها}: ۱\times b=۲ \\ \text{جمع ریشه‌ها}: ۱+b=-a \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=۲ \\ a=-۳ \end{cases}$$

درنتیجه:

$$a-b=-۳-۲=-۵$$

۵۶ گزینه ۳

تابع f در $x=۲$ و $x=-۲$ پیوسته است، پس می‌توانیم بدون تعریف، مقدار مشتق‌های خواسته‌شده را حساب کنیم.
ضابطهٔ f را در ۲^+ بدون براکت و قدر مطلق می‌نویسیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'_+(۲) = ([۶^+]\underbrace{|x-۴|}_{\substack{\downarrow \\ \text{مثبت}}})' = (۶(x^۲-۴))' = ۶(۲x) \xrightarrow{x=۲^+} ۲۴$$

ضابطهٔ f را در $(-۲)^-$ بدون براکت و قدر مطلق می‌نویسیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'_-(-۲) = ([-۶^-]\underbrace{|x^۲-۴|}_{\substack{\downarrow \\ \text{مثبت}}})' = (-۷(x^۲-۴))' = -۷(۲x) \xrightarrow{x=-۲} ۲۸$$

بنابراین حاصل $f'_+(۲) - f'_-(-۲)$ برابر است با:

$$f'_+(۲) - f'_-(-۲) = ۲۴ - ۲۸ = -۴$$

۵۷ گزینه ۳

گام اول

الف) $f'_+(\circ)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ و $f'_-(\circ)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\circ$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq \circ \\ -x & ; x < \circ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌ازای $x>\circ$ و $x<\circ$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=\circ$ محاسبه می‌کنیم.

$$x>\circ : |x| = x \ , \ \ [x] = \circ \Rightarrow f(x) = x \times \circ = \circ \Rightarrow f'_+(\circ) = \circ$$
$$x<\circ : |x| = -x \ , \ \ [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = (-x)(-۱) = x \Rightarrow f'_-(\circ) = ۱$$

بنابراین:

$$f'_-(\circ) - f'_+(\circ) = ۱ - \circ = ۱$$

۵۸

گزینه ۴

آهنگ متوسط تغییرات تابع f در بازهٔ $[a,b]$ همان شیب خط واصل بین دو نقطه به طول‌های a و b بر نمودار f است، یعنی شیب همین خط $y = mx - ۳$! پس شیب این خط برابر ۴ می‌باشد و $m = ۴$ است.
از طرف دیگر برای پیدا کردن طول نقاط تلاقی a و b، می‌دانیم که باید منحنی f را با خط $y = ۴x - ۳$ قطع دهیم:

$$۳x - ۲x^۲ = ۴x - ۳ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۳ = ۰$$

a و b ریشه‌های این معادله هستند، پس:

$$a^۳ + b^۳ = s^۳ - ۳ps \xrightarrow[p=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۲}]{s=\frac{-b}{a}=\frac{-۱}{۲}} (-\frac{۱}{۲})^۳ - ۳(\frac{-۳}{۲})(\frac{-۱}{۲}) = \frac{-۱}{۸} - \frac{۹}{۴} = -\frac{۱۹}{۸}$$

۵۹

گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۹) - f(۱)}{۹ - ۱} = \frac{۳ - ۱}{۹ - ۱} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$
$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$$

چون آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر شده‌اند، پس اختلاف صفر است.

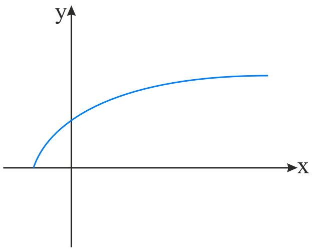
۶۰

گزینه ۴

محاسبهٔ آهنگ تغییر مشکل است، ازطرفی تابع در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر است و باتوجه‌به کوتاه‌بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته‌شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = ۲$ است.

$$f(x) = ۳\sqrt{۴x + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۳ \times ۴}{۲\sqrt{۴x + ۱}} \Rightarrow f'(۲) = ۲$$

پس پاسخ گزینهٔ "۲" یا "۴" است. ازطرفی باتوجه‌به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینهٔ "۴" می‌باشد.



$$f(x) = ۳\sqrt{۴x + ۱}$$